7. ПРОЈЕКТОРИ

(7.1) Нека су $\mathbb{W}_1$ и $\mathbb{W}_2$ потпростори унитарног простора $\mathbb{U}$. Потпростори $\mathbb{W}_1'$ и $\mathbb{W}_2'$ дефинишу се тако да важи

$$\mathbb{W}_1 = (\mathbb{W}_1 \cap \mathbb{W}_2) \oplus \mathbb{W}_1' \quad \text{и} \quad \mathbb{W}_2 = (\mathbb{W}_1 \cap \mathbb{W}_2) \oplus \mathbb{W}_2'.$$

Показати да пројектор $\hat{P}_{\mathrm{W}_1}$ на потпростор $\mathbb{W}_1$ и пројектор $\hat{P}_{\mathrm{W}_2}$ на потпростор $\mathbb{W}_2$ *комутирају* акко су потпростори $\mathbb{W}_1'$ и $\mathbb{W}_2'$ међусобно ортогонални.

Нека је $\mathbb{U}' = (\mathbb{W}_1 + \mathbb{W}_2)'$. Онда следи да је $\mathbb{U} = (\mathbb{W}_1 \cap \mathbb{W}_2)' + \mathbb{W}_1' + \mathbb{W}_2' + \mathbb{U}'$. Тада се произвољни вектор из унитарног простора $\mathbb{U}$ може написати као

$$|v\rangle_{\mathbb{U}} = |v\rangle_{\mathbb{W}_1 \cap \mathbb{W}_2} + |v\rangle_{\mathbb{W}_1'} + |v\rangle_{\mathbb{W}_2'} + |v\rangle_{\mathbb{U}'}.$$

Прво се делује производом оператора $\hat{P}_{\mathrm{W}_1}\hat{P}_{\mathrm{W}_2}$ на поменути вектор

$$\begin{aligned}\hat{P}_{\mathrm{W}_1}\hat{P}_{\mathrm{W}_2}|v\rangle_{\mathbb{U}} &= \hat{P}_{\mathrm{W}_1}\hat{P}_{\mathrm{W}_2}\left(|v\rangle_{\mathbb{W}_1 \cap \mathbb{W}_2} + |v\rangle_{\mathbb{W}_1'} + |v\rangle_{\mathbb{W}_2'} + |v\rangle_{\mathbb{U}'}\right) \\ &= \hat{P}_{\mathrm{W}_1}\hat{P}_{\mathrm{W}_2}|v\rangle_{\mathbb{W}_1 \cap \mathbb{W}_2} + \hat{P}_{\mathrm{W}_1}\hat{P}_{\mathrm{W}_2}|v\rangle_{\mathbb{W}_1'} + \hat{P}_{\mathrm{W}_1}\hat{P}_{\mathrm{W}_2}|v\rangle_{\mathbb{W}_2'} + \hat{P}_{\mathrm{W}_1}\hat{P}_{\mathrm{W}_2}|v\rangle_{\mathbb{U}'}\end{aligned}$$

Како пројектор $\hat{P}_{\mathrm{W}_2}$ пројектује искључиво у потпростор $\mathbb{W}_2$, онда је $\hat{P}_{\mathrm{W}_2}|v\rangle_{\mathbb{W}_1 \cap \mathbb{W}_2} = |v\rangle_{\mathbb{W}_1 \cap \mathbb{W}_2}$, $\hat{P}_{\mathrm{W}_2}|v\rangle_{\mathbb{W}_1'} = |0\rangle_{\mathbb{W}_2'}$, $\hat{P}_{\mathrm{W}_2}|v\rangle_{\mathbb{W}_2'} = |v\rangle_{\mathbb{W}_2'}$ и $\hat{P}_{\mathrm{W}_2}|v\rangle_{\mathbb{U}'} = |0\rangle_{\mathbb{U}'}$, те следи да је

$$\hat{P}_{\mathrm{W}_1}\hat{P}_{\mathrm{W}_2}|v\rangle_{\mathbb{U}} = \hat{P}_{\mathrm{W}_1}|v\rangle_{\mathbb{W}_1 \cap \mathbb{W}_2} + \hat{P}_{\mathrm{W}_1}|0\rangle_{\mathbb{W}_2'} + \hat{P}_{\mathrm{W}_1}|v\rangle_{\mathbb{W}_2'} + \hat{P}_{\mathrm{W}_1}|0\rangle_{\mathbb{U}'} = \hat{P}_{\mathrm{W}_1}|v\rangle_{\mathbb{W}_1 \cap \mathbb{W}_2} + \hat{P}_{\mathrm{W}_1}|v\rangle_{\mathbb{W}_2'}.$$

Како пројектор $\hat{P}_{\mathrm{W}_1}$ пројектује само у потпростор $\mathbb{W}_1$, онда ће бити $\hat{P}_{\mathrm{W}_1}|v\rangle_{\mathbb{W}_1 \cap \mathbb{W}_2} = |v\rangle_{\mathbb{W}_1 \cap \mathbb{W}_2}$ и $\hat{P}_{\mathrm{W}_1}|v\rangle_{\mathbb{W}_2'} = |0\rangle_{\mathbb{W}_1'}$, одакле се добија

$$\hat{P}_{\mathrm{W}_1}\hat{P}_{\mathrm{W}_2}|v\rangle_{\mathbb{U}} = |v\rangle_{\mathbb{W}_1 \cap \mathbb{W}_2}.$$

Потом се делује производом оператора $\hat{P}_{\mathrm{W}_2}\hat{P}_{\mathrm{W}_1}$ на горе поменути вектор

$$\begin{aligned}\hat{P}_{\mathrm{W}_2}\hat{P}_{\mathrm{W}_1}|v\rangle_{\mathbb{U}} &= \hat{P}_{\mathrm{W}_2}\hat{P}_{\mathrm{W}_1}\left(|v\rangle_{\mathbb{W}_1 \cap \mathbb{W}_2} + |v\rangle_{\mathbb{W}_1'} + |v\rangle_{\mathbb{W}_2'} + |v\rangle_{\mathbb{U}'}\right) \\ &= \hat{P}_{\mathrm{W}_2}\hat{P}_{\mathrm{W}_1}|v\rangle_{\mathbb{W}_1 \cap \mathbb{W}_2} + \hat{P}_{\mathrm{W}_2}\hat{P}_{\mathrm{W}_1}|v\rangle_{\mathbb{W}_1'} + \hat{P}_{\mathrm{W}_2}\hat{P}_{\mathrm{W}_1}|v\rangle_{\mathbb{W}_2'} + \hat{P}_{\mathrm{W}_2}\hat{P}_{\mathrm{W}_1}|v\rangle_{\mathbb{U}'}\end{aligned}$$

Како пројектор $\hat{P}_{\mathrm{W}_1}$ пројектује искључиво у потпростор $\mathbb{W}_1$, онда је $\hat{P}_{\mathrm{W}_1}|v\rangle_{\mathbb{W}_1 \cap \mathbb{W}_2} = |v\rangle_{\mathbb{W}_1 \cap \mathbb{W}_2}$, $\hat{P}_{\mathrm{W}_1}|v\rangle_{\mathbb{W}_1'} = |v\rangle_{\mathbb{W}_1'}$, $\hat{P}_{\mathrm{W}_1}|v\rangle_{\mathbb{W}_2'} = |0\rangle_{\mathbb{W}_1'}$ и $\hat{P}_{\mathrm{W}_1}|v\rangle_{\mathbb{U}'} = |0\rangle_{\mathbb{U}'}$, те ће бити

$$\hat{P}_{\mathrm{W}_2}\hat{P}_{\mathrm{W}_1}|v\rangle_{\mathbb{U}} = \hat{P}_{\mathrm{W}_2}|v\rangle_{\mathbb{W}_1 \cap \mathbb{W}_2} + \hat{P}_{\mathrm{W}_2}|v\rangle_{\mathbb{W}_1'} + \hat{P}_{\mathrm{W}_2}|0\rangle_{\mathbb{W}_1'} + \hat{P}_{\mathrm{W}_2}|0\rangle_{\mathbb{U}'} = \hat{P}_{\mathrm{W}_2}|v\rangle_{\mathbb{W}_1 \cap \mathbb{W}_2} + \hat{P}_{\mathrm{W}_2}|v\rangle_{\mathbb{W}_1'}$$

Како пројектор $\hat{P}_{\mathrm{W}_2}$ пројектује само у потпростор $\mathbb{W}_2$, онда ће бити $\hat{P}_{\mathrm{W}_2}|v\rangle_{\mathbb{W}_1\cap\mathbb{W}_2} = |v\rangle_{\mathbb{W}_1\cap\mathbb{W}_2}$ и $\hat{P}_{\mathrm{W}_2}|v\rangle_{\mathbb{W}_1'} = |0\rangle_{\mathbb{W}_2'}$, те се коначно добија исти израз са десне стране као и у првом случају

$$\underline{\begin{cases} \hat{P}_{\mathrm{W}_1}\hat{P}_{\mathrm{W}_2}|v\rangle_{\mathbb{U}} = |v\rangle_{\mathbb{W}_1\cap\mathbb{W}_2} \\ \hat{P}_{\mathrm{W}_2}\hat{P}_{\mathrm{W}_1}|v\rangle_{\mathbb{U}} = |v\rangle_{\mathbb{W}_1\cap\mathbb{W}_2} \end{cases}} \Rightarrow \hat{P}_{\mathrm{W}_1}\hat{P}_{\mathrm{W}_2}|v\rangle_{\mathbb{U}} = \hat{P}_{\mathrm{W}_2}\hat{P}_{\mathrm{W}_1}|v\rangle_{\mathbb{U}} .$$

Елиминисањем непотребног вектора с обе стране добија се операторска једнакост

$$\hat{P}_{\mathrm{W}_1}\hat{P}_{\mathrm{W}_2} = \hat{P}_{\mathrm{W}_2}\hat{P}_{\mathrm{W}_1}$$

из које је очигледно да пројектори $\hat{P}_{\mathrm{W}_1}$ и $\hat{P}_{\mathrm{W}_2}$ стварно *комутирају*.

Обрнуто, нека сада претпоставка задатка буде негирана - нека потпростор $\mathbb{W}_1'$ није ортогоналан на потпростор $\mathbb{W}_2'$: $\mathbb{W}_1' \not\perp \mathbb{W}_2'$. То значи да постоји вектор $|v\rangle_{\mathbb{W}_1'} \in \mathbb{W}_1'$ с особином да је $\hat{P}_{\mathrm{W}_2}|v\rangle_{\mathbb{W}_1'} \neq |0\rangle_{\mathbb{W}_2'}$. Будући да мора бити да је $\hat{P}_{\mathrm{W}_1}|v\rangle_{\mathbb{W}_1'} = |v\rangle_{\mathbb{W}_1'}$, следи

$$\hat{P}_{\mathrm{W}_1}\hat{P}_{\mathrm{W}_2}|v\rangle_{\mathbb{W}_1'} = \hat{P}_{\mathrm{W}_2}\hat{P}_{\mathrm{W}_1}|v\rangle_{\mathbb{W}_1'} = \hat{P}_{\mathrm{W}_2}|v\rangle_{\mathbb{W}_1'} \neq |0\rangle_{\mathbb{W}_2'} ,$$

што мора значити да је

$$\hat{P}_{\mathrm{W}_2}|v\rangle_{\mathbb{W}_1'} \in \mathbb{W}_1 .$$

Пошто важи и да је $\hat{P}_{\mathrm{W}_2}|v\rangle_{\mathbb{W}_1'} \in \mathbb{W}_2$, то значи да мора бити

$$\hat{P}_{\mathrm{W}_2}|v\rangle_{\mathbb{W}_1'} \in \mathbb{W}_1 \cap \mathbb{W}_2 .$$

Међутим, како је $|v\rangle_{\mathbb{W}_1'} \in (\mathbb{W}_1 \cap \mathbb{W}_2)^{\perp}$ ово није могуће, те самим тим не може да важи ни претпостављена негација - потпростор $\mathbb{W}_1'$ *мора бити ортогоналан* на потпростор $\mathbb{W}_2'$.

(7.2) Доказати да су оператори $\hat{P}_1 \stackrel{\mathrm{d}}{=} \hat{P}_{W_1}\hat{P}_{W_2}$ и $\hat{P}_2 \stackrel{\mathrm{d}}{=} \hat{P}_{W_1} + \hat{P}_{W_2} - \hat{P}_{W_1}\hat{P}_{W_2}$ пројектори акко $\hat{P}_{W_1}$ и $\hat{P}_{W_2}$ комутирају. Показати да би у том случају $\hat{P}_1$ био пројектор на пресек $\mathbb{W}_1 \cap \mathbb{W}_2$, док би $\hat{P}_2$ био пројектор на суму $\mathbb{W}_1 + \mathbb{W}_2$.

Прво: да би оператор $\hat{P}_1$ био пројектор, он мора бити идемпотентан и ермитски. Прво се проверава његова *идемпотентност*: $\hat{P}_1^2 = \hat{P}_1$, деловањем квадрата задатог оператора на произвољни вектор

$$\hat{P}_1^2 |v\rangle = (\hat{P}_1\hat{P}_1)|v\rangle = (\hat{P}_{W_1}\hat{P}_{W_2}\hat{P}_{W_1}\hat{P}_{W_2})|v\rangle .$$

Ако према претпоставци задатка оператори $\hat{P}_{W_1}$ и $\hat{P}_{W_2}$ комутирају: $\hat{P}_{W_1}\hat{P}_{W_2} = \hat{P}_{W_2}\hat{P}_{W_1}$, онда је

$$\hat{P}_1^2 |v\rangle = (\hat{P}_{W_1}\hat{P}_{W_1}\hat{P}_{W_2}\hat{P}_{W_2})|v\rangle = (\hat{P}_{W_1}\hat{P}_{W_1}\hat{P}_{W_2}\hat{P}_{W_2})|v\rangle = \hat{P}_{W_1}^2\hat{P}_{W_2}^2|v\rangle .$$

Како су оператори $\hat{P}_{W_1}$ и $\hat{P}_{W_2}$ пројектори, они морају бити идемпотентни: $\hat{P}_{W_1}^2 = \hat{P}_{W_1}$, $\hat{P}_{W_2}^2 = \hat{P}_{W_2}$, одакле следи да је

$$\hat{P}_1^2 |v\rangle = \hat{P}_{W_1}\hat{P}_{W_2}|v\rangle = \hat{P}_1|v\rangle .$$

Уз одбацивање сувишног вектора с обе стране добија се операторска једнакост

$$\hat{P}_1^2 = \hat{P}_1 .$$

Значи, идемпотентност задатог оператора испуњена је ако важи да су оператори $\hat{P}_{W_1}$ и $\hat{P}_{W_2}$ комутативни.

Такође, поменути оператор мора бити *ермитски*: $\hat{P}_1^\dagger = \hat{P}_1$; зато се формира скаларни производ

$$\left\langle v_1 \middle| \hat{P}_1 v_2 \right\rangle = \left\langle v_1 \middle| \hat{P}_{W_1}\hat{P}_{W_2} v_2 \right\rangle = \left\langle (\hat{P}_{W_1}\hat{P}_{W_2})^\dagger v_1 \middle| v_2 \right\rangle = \left\langle \hat{P}_{W_2}^\dagger \hat{P}_{W_1}^\dagger v_1 \middle| v_2 \right\rangle .$$

Како су оператори $\hat{P}_{W_1}$ и $\hat{P}_{W_2}$ према поставци задатка пројектори, они морају бити ермитични: $\hat{P}_{W_1}^\dagger = \hat{P}_{W_1}$, $\hat{P}_{W_2}^\dagger = \hat{P}_{W_2}$, те ће бити

$$\left\langle v_1 \middle| \hat{P}_1 v_2 \right\rangle = \left\langle \hat{P}_{W_2}\hat{P}_{W_1} v_1 \middle| v_2 \right\rangle .$$

Опет се узима у обзир комутативност оператора $\hat{P}_{W_1}$ и $\hat{P}_{W_2}$: $\hat{P}_{W_2}\hat{P}_{W_1} = \hat{P}_{W_1}\hat{P}_{W_2}$, што даје

$$\left\langle v_1 \middle| \hat{P}_1 v_2 \right\rangle = \left\langle \hat{P}_{W_1}\hat{P}_{W_2} v_1 \middle| v_2 \right\rangle ,$$

односно

$$\left\langle v_1 \middle| \hat{P}_1 v_2 \right\rangle = \left\langle \hat{P}_1 v_1 \middle| v_2 \right\rangle .$$

Упоређивањем добијеног израза са дефиниционим изразом за адјунговане операторе

$$\left\langle v_1 \middle| \hat{P}_1^{\dagger} v_2 \right\rangle = \left\langle \hat{P}_1 v_1 \middle| v_2 \right\rangle$$

добија се да је

$$\hat{P}_1^{\dagger} = \hat{P}_1$$

чиме је потврђена ермитичност задатог оператора, наравно ако је испуњена комутативност оператора $\hat{P}_{W_1}$ и $\hat{P}_{W_2}$.

Значи да је оператор $\hat{P}_1$ заиста *пројектор*.

Друго: оператор $\hat{P}_2$ биће пројектор само ако је идемпотентан и ермитски. Прво ће бити проверена *идемпотентност*

$$\begin{aligned}\hat{P}_2^2|v\rangle &= (\hat{P}_2\hat{P}_2)|v\rangle = (\hat{P}_{W_1} + \hat{P}_{W_2} - \hat{P}_{W_1}\hat{P}_{W_2})(\hat{P}_{W_1} + \hat{P}_{W_2} - \hat{P}_{W_1}\hat{P}_{W_2})|v\rangle \\ &= (\hat{P}_{W_1}\hat{P}_{W_1} + \hat{P}_{W_1}\hat{P}_{W_2} - \hat{P}_{W_1}\hat{P}_{W_1}\hat{P}_{W_2} + \hat{P}_{W_2}\hat{P}_{W_1} + \hat{P}_{W_2}\hat{P}_{W_2} - \hat{P}_{W_2}\hat{P}_{W_1}\hat{P}_{W_2} \\ &\quad - \hat{P}_{W_1}\hat{P}_{W_2}\hat{P}_{W_1} - \hat{P}_{W_1}\hat{P}_{W_2}\hat{P}_{W_2} + \hat{P}_{W_1}\hat{P}_{W_2}\hat{P}_{W_1}\hat{P}_{W_2})|v\rangle \\ &= (\hat{P}_{W_1}^2 + \hat{P}_{W_1}\hat{P}_{W_2} - \hat{P}_{W_1}^2\hat{P}_{W_2} + \hat{P}_{W_2}\hat{P}_{W_1} + \hat{P}_{W_2}^2 - \hat{P}_{W_2}\hat{P}_{W_1}\hat{P}_{W_2} - \hat{P}_{W_1}\hat{P}_{W_2}\hat{P}_{W_1} - \hat{P}_{W_1}\hat{P}_{W_2}\hat{P}_{W_2} + \hat{P}_{W_1}\hat{P}_{W_2}\hat{P}_{W_1}\hat{P}_{W_2})|v\rangle\end{aligned}$$

Оператори $\hat{P}_{W_1}$ и $\hat{P}_{W_2}$ су пројектори, значи идемпотентни: $\hat{P}_{W_1}^2 = \hat{P}_{W_1}$, $\hat{P}_{W_2}^2 = \hat{P}_{W_2}$, те следи

$$\begin{aligned}\hat{P}_2^2|v\rangle &= (\hat{P}_{W_1} + \cancel{\hat{P}_{W_1}\hat{P}_{W_2}} - \cancel{\hat{P}_{W_1}\hat{P}_{W_2}} + \hat{P}_{W_2}\hat{P}_{W_1} + \hat{P}_{W_2} - \hat{P}_{W_2}\hat{P}_{W_1}\hat{P}_{W_2} - \hat{P}_{W_1}\hat{P}_{W_2}\hat{P}_{W_1} - \hat{P}_{W_1}\hat{P}_{W_2}\hat{P}_{W_2} + \hat{P}_{W_1}\hat{P}_{W_2}\hat{P}_{W_1}\hat{P}_{W_2})|v\rangle \\ &= (\hat{P}_{W_1} + \hat{P}_{W_2}\hat{P}_{W_1} + \hat{P}_{W_2} - \hat{P}_{W_2}\hat{P}_{W_1}\hat{P}_{W_2} - \hat{P}_{W_1}\hat{P}_{W_2}\hat{P}_{W_1} - \hat{P}_{W_1}\hat{P}_{W_2}\hat{P}_{W_2} + \hat{P}_{W_1}\hat{P}_{W_2}\hat{P}_{W_1}\hat{P}_{W_2})|v\rangle\end{aligned}$$

Како оператори $\hat{P}_{W_1}$ и $\hat{P}_{W_2}$ комутирају, биће

$$\begin{aligned}\hat{P}_2^2|v\rangle &= (\hat{P}_{W_1} + \hat{P}_{W_1}\hat{P}_{W_2} + \hat{P}_{W_2} - \hat{P}_{W_1}\hat{P}_{W_2}\hat{P}_{W_2} - \hat{P}_{W_1}\hat{P}_{W_1}\hat{P}_{W_2} - \hat{P}_{W_1}\hat{P}_{W_2}\hat{P}_{W_2} + \hat{P}_{W_1}\hat{P}_{W_1}\hat{P}_{W_2}\hat{P}_{W_2})|v\rangle \\ &= (\hat{P}_{W_1} + \hat{P}_{W_1}\hat{P}_{W_2} + \hat{P}_{W_2} - \hat{P}_{W_1}\hat{P}_{W_2}^2 - \hat{P}_{W_1}^2\hat{P}_{W_2} - \hat{P}_{W_1}\hat{P}_{W_2}^2 + \hat{P}_{W_1}^2\hat{P}_{W_2}^2)|v\rangle\end{aligned}$$

Опет улази у игру идемпотетност оператора $\hat{P}_{W_1}$ и $\hat{P}_{W_2}$, што доводи до следећег израза

$$\begin{aligned}\hat{P}_2^2|v\rangle &= (\hat{P}_{W_1} + \cancel{\hat{P}_{W_1}\hat{P}_{W_2}} + \hat{P}_{W_2} - \cancel{\hat{P}_{W_1}\hat{P}_{W_2}} - \hat{P}_{W_1}\hat{P}_{W_2} - \cancel{\hat{P}_{W_1}\hat{P}_{W_2}} + \cancel{\hat{P}_{W_1}\hat{P}_{W_2}})|v\rangle \\ &= (\hat{P}_{W_1} + \hat{P}_{W_2} - \hat{P}_{W_1}\hat{P}_{W_2})|v\rangle\end{aligned}$$

или

$$\hat{P}_2^2|v\rangle = \hat{P}_2|v\rangle .$$

Након елиминисања сувишног вектора, добија се операторска једнакост

$$\hat{P}_2^2 = \hat{P}_2$$

чиме је показано да је оператор $\hat{P}_2$ идемпотентан (ако оператори $\hat{P}_{W_1}$ и $\hat{P}_{W_2}$ комутирају).

Преостало је да се провери *ермитичност* оператора $\hat{P}_2$. Формира се скаларни производ

$$\begin{aligned}\left\langle v_1 \middle| \hat{P}_2 v_2 \right\rangle &= \left\langle v_1 \middle| (\hat{P}_{W_1} + \hat{P}_{W_2} - \hat{P}_{W_1}\hat{P}_{W_2}) v_2 \right\rangle = \left\langle v_1 \middle| \hat{P}_{W_1} v_2 \right\rangle + \left\langle v_1 \middle| \hat{P}_{W_2} v_2 \right\rangle - \left\langle v_1 \middle| \hat{P}_{W_1}\hat{P}_{W_2} v_2 \right\rangle \\ &= \left\langle \hat{P}^\dagger_{W_1} v_1 \middle| v_2 \right\rangle + \left\langle \hat{P}^\dagger_{W_2} v_1 \middle| v_2 \right\rangle - \left\langle (\hat{P}_{W_1}\hat{P}_{W_2})^\dagger v_1 \middle| v_2 \right\rangle \\ &= \left\langle \hat{P}^\dagger_{W_1} v_1 \middle| v_2 \right\rangle + \left\langle \hat{P}^\dagger_{W_2} v_1 \middle| v_2 \right\rangle - \left\langle \hat{P}^\dagger_{W_2}\hat{P}^\dagger_{W_1} v_1 \middle| v_2 \right\rangle\end{aligned}$$

Како су оператори $\hat{P}_{W_1}$ и $\hat{P}_{W_2}$ пројектори, они морају бити ермитски, те следи

$$\left\langle v_1 \middle| \hat{P}_2 v_2 \right\rangle = \left\langle \hat{P}_{W_1} v_1 \middle| v_2 \right\rangle + \left\langle \hat{P}_{W_2} v_1 \middle| v_2 \right\rangle - \left\langle \hat{P}_{W_2}\hat{P}_{W_1} v_1 \middle| v_2 \right\rangle = \left\langle (\hat{P}_{W_1} + \hat{P}_{W_2} - \hat{P}_{W_2}\hat{P}_{W_1}) v_1 \middle| v_2 \right\rangle .$$

Опет се узима у обзир комутативност оператора $\hat{P}_{W_1}$ и $\hat{P}_{W_2}$, одакле се добија

$$\left\langle v_1 \middle| \hat{P}_2 v_2 \right\rangle = \left\langle (\hat{P}_{W_1} + \hat{P}_{W_2} - \hat{P}_{W_1}\hat{P}_{W_2}) v_1 \middle| v_2 \right\rangle ,$$

односно

$$\left\langle v_1 \middle| \hat{P}_2 v_2 \right\rangle = \left\langle \hat{P}_2 v_1 \middle| v_2 \right\rangle .$$

Упоређивањем овог израза са дефиниционим изразом за адјунговане операторе

$$\left\langle v_1 \middle| \hat{P}^\dagger_2 v_2 \right\rangle = \left\langle \hat{P}_2 v_1 \middle| v_2 \right\rangle$$

јасно је да је

$$\hat{P}^\dagger_2 = \hat{P}_2$$

те је оператор $\hat{P}_2$ ермитски.

Даклем, оператор $\hat{P}_2$ јесте *пројектор*, све док оператори $\hat{P}_{W_1}$ и $\hat{P}_{W_2}$ комутирају.

Треће: преостало је да се покаже да је $\hat{P}_1$ пројектор на пресек $\mathbb{W}_1 \cap \mathbb{W}_2$, као и да је $\hat{P}_2$ пројектор на збир $\mathbb{W}_1 + \mathbb{W}_2$.

Прво се делује првим пројектором $\hat{P}_1$ на произвољни вектор $|v\rangle_{\mathbb{U}}$ унитарног простора

$$\begin{aligned}\hat{P}_1 |v\rangle_{\mathbb{U}} &= \hat{P}_{W_1}\hat{P}_{W_2}\left(|v\rangle_{\mathbb{W}_1\cap\mathbb{W}_2} + |v\rangle_{\mathbb{W}_1'} + |v\rangle_{\mathbb{W}_2'} + |v\rangle_{\mathbb{U}'} \right) \\ &= \hat{P}_{W_1}\left(\hat{P}_{W_2}|v\rangle_{\mathbb{W}_1\cap\mathbb{W}_2} + \hat{P}_{W_2}|v\rangle_{\mathbb{W}_1'} + \hat{P}_{W_2}|v\rangle_{\mathbb{W}_2'} + \hat{P}_{W_2}|v\rangle_{\mathbb{U}'} \right) \\ &= \hat{P}_{W_1}\left(|v\rangle_{\mathbb{W}_1\cap\mathbb{W}_2} + |0\rangle_{\mathbb{W}_2'} + |v\rangle_{\mathbb{W}_2'} + |0\rangle_{\mathbb{U}'} \right) = \hat{P}_{W_1}|v\rangle_{\mathbb{W}_1\cap\mathbb{W}_2} + \hat{P}_{W_1}|v\rangle_{\mathbb{W}_2'} \\ &= |v\rangle_{\mathbb{W}_1\cap\mathbb{W}_2}\end{aligned}$$

те се као резултат пројекције пројектором $\hat{P}_1$ добија вектор из пресека $\mathbb{W}_1 \cap \mathbb{W}_2$, што се може записати и као деловање пројектора

$$\hat{P}_1 |v\rangle_{\mathbb{U}} = \hat{P}_{W_1\cap W_2} |v\rangle_{\mathbb{U}} ,$$

илити, након одбацивања сувишног вектора с обе стране, као операторска једнакост

$$\hat{P}_1 = \hat{P}_{\mathrm{W}_1 \cap \mathrm{W}_2}.$$

Сада се се делује другим пројектором $\hat{P}_2$ на исти вектор

$$\begin{aligned}
\hat{P}_2 |v\rangle_{\mathbb{U}} &= (\hat{P}_{\mathrm{W}_1} + \hat{P}_{\mathrm{W}_2} - \hat{P}_{\mathrm{W}_1}\hat{P}_{\mathrm{W}_2})\left(|v\rangle_{\mathbb{W}_1\cap\mathbb{W}_2} + |v\rangle_{\mathbb{W}_1'} + |v\rangle_{\mathbb{W}_2'} + |v\rangle_{\mathbb{U}'}\right)\\
&= \hat{P}_{\mathrm{W}_1}\left(|v\rangle_{\mathbb{W}_1\cap\mathbb{W}_2} + |v\rangle_{\mathbb{W}_1'} + |v\rangle_{\mathbb{W}_2'} + |v\rangle_{\mathbb{U}'}\right) + \hat{P}_{\mathrm{W}_2}\left(|v\rangle_{\mathbb{W}_1\cap\mathbb{W}_2} + |v\rangle_{\mathbb{W}_1'} + |v\rangle_{\mathbb{W}_2'} + |v\rangle_{\mathbb{U}'}\right)\\
&\quad -\hat{P}_{\mathrm{W}_1}\hat{P}_{\mathrm{W}_2}\left(|v\rangle_{\mathbb{W}_1\cap\mathbb{W}_2} + |v\rangle_{\mathbb{W}_1'} + |v\rangle_{\mathbb{W}_2'} + |v\rangle_{\mathbb{U}'}\right)\\
&= \hat{P}_{\mathrm{W}_1}|v\rangle_{\mathbb{W}_1\cap\mathbb{W}_2} + \hat{P}_{\mathrm{W}_1}|v\rangle_{\mathbb{W}_1'} + \hat{P}_{\mathrm{W}_1}|v\rangle_{\mathbb{W}_2'} + \hat{P}_{\mathrm{W}_1}|v\rangle_{\mathbb{U}'}\\
&\quad +\hat{P}_{\mathrm{W}_2}|v\rangle_{\mathbb{W}_1\cap\mathbb{W}_2} + \hat{P}_{\mathrm{W}_2}|v\rangle_{\mathbb{W}_1'} + \hat{P}_{\mathrm{W}_2}|v\rangle_{\mathbb{W}_2'} + \hat{P}_{\mathrm{W}_2}|v\rangle_{\mathbb{U}'}\\
&\quad -\hat{P}_{\mathrm{W}_1}\hat{P}_{\mathrm{W}_2}|v\rangle_{\mathbb{W}_1\cap\mathbb{W}_2} - \hat{P}_{\mathrm{W}_1}\hat{P}_{\mathrm{W}_2}|v\rangle_{\mathbb{W}_1'} - \hat{P}_{\mathrm{W}_1}\hat{P}_{\mathrm{W}_2}|v\rangle_{\mathbb{W}_2'} - \hat{P}_{\mathrm{W}_1}\hat{P}_{\mathrm{W}_2}|v\rangle_{\mathbb{U}'}\\
&= |v\rangle_{\mathbb{W}_1\cap\mathbb{W}_2} + |v\rangle_{\mathbb{W}_1'} + |0\rangle_{\mathbb{W}_1'} + |0\rangle_{\mathbb{W}_1'} + |v\rangle_{\mathbb{W}_1\cap\mathbb{W}_2} + |0\rangle_{\mathbb{W}_2'} + |v\rangle_{\mathbb{W}_2'} + |0\rangle_{\mathbb{W}_2'}\\
&\quad -\hat{P}_{\mathrm{W}_1}|v\rangle_{\mathbb{W}_1\cap\mathbb{W}_2} - \hat{P}_{\mathrm{W}_1}|0\rangle_{\mathbb{W}_2'} - \hat{P}_{\mathrm{W}_1}|v\rangle_{\mathbb{W}_2'} - \hat{P}_{\mathrm{W}_1}|0\rangle_{\mathbb{W}_2'}\\
&= 2|v\rangle_{\mathbb{W}_1\cap\mathbb{W}_2} + |v\rangle_{\mathbb{W}_1'} + |v\rangle_{\mathbb{W}_2'} - |v\rangle_{\mathbb{W}_1\cap\mathbb{W}_2} = |v\rangle_{\mathbb{W}_1\cap\mathbb{W}_2} + |v\rangle_{\mathbb{W}_1'} + |v\rangle_{\mathbb{W}_2'}
\end{aligned}$$

илити

$$\hat{P}_2 |v\rangle_{\mathbb{U}} = |v\rangle_{\mathbb{W}_1\cap\mathbb{W}_2} + |v\rangle_{\mathbb{W}_1'} + |v\rangle_{\mathbb{W}_2'}.$$

Како је, на основу претходног задатка

$$\underline{\begin{cases}\mathbb{W}_1 = (\mathbb{W}_1 \cap \mathbb{W}_2) \oplus \mathbb{W}_1' \\ \mathbb{W}_2 = (\mathbb{W}_1 \cap \mathbb{W}_2) \oplus \mathbb{W}_2'\end{cases}} \Rightarrow \mathbb{W}_1 + \mathbb{W}_2 = (\mathbb{W}_1 \cap \mathbb{W}_2) \oplus \mathbb{W}_1' + (\mathbb{W}_1 \cap \mathbb{W}_2) \oplus \mathbb{W}_2',$$

односно

$$\mathbb{W}_1 + \mathbb{W}_2 = (\mathbb{W}_1 \cap \mathbb{W}_2) \oplus (\mathbb{W}_1' + \mathbb{W}_2'),$$

то значи да се пројектором $\hat{P}_2$ произвољни вектор унитарног простора пројектовао у горе дат збир два потпростора, што се може записати како деловање пројектора

$$\hat{P}_2 |v\rangle_{\mathbb{U}} = \hat{P}_{\mathrm{W}_1 + \mathrm{W}_2} |v\rangle_{\mathbb{U}},$$

одакле се, одбацивањем сувишног вектора, добија операторска једнакост

$$\hat{P}_2 = \hat{P}_{\mathrm{W}_1 + \mathrm{W}_2}.$$

(7.3) Нека је $\mathbb{W}$ $m-$димензионални потпростор простора $\mathbb{C}^n$, а $\{|v_1\rangle, |v_2\rangle, \ldots, |v_m\rangle\}$ његов произвољни подбазис који је векторима $\{|v_{m+1}\rangle, |v_{m+2}\rangle, \ldots, |v_n\rangle\}$ допуњен до базиса у $\mathbb{C}^n$. Нека је $\{|V_1\rangle, |V_2\rangle, \ldots, |V_n\rangle\}$ реципрочни базис овог базиса. Показати

(а) да је

$$\sum_{i=1}^{m} |v_i\rangle\langle V_i|$$

идемпотентан оператор, чија је област ликова потпростор $\mathbb{W}$;

(б) ако је базис $\{|v_1\rangle, |v_2\rangle, \ldots, |v_n\rangle\}$ такав да је

$$\mathbb{C}^n = \mathbb{W} \oplus \mathbb{L}(|v_{m+1}\rangle, |v_{m+2}\rangle, \ldots, |v_n\rangle)$$

онда је

$$\sum_{i=1}^{m} |v_i\rangle\langle V_i|$$

пројектор на потпростор $\mathbb{W}$;

(в) ако је подбазис $\{|v_1\rangle, |v_2\rangle, \ldots, |v_m\rangle\}$ ортонормиран, онда је

$$\sum_{i=1}^{m} |v_i\rangle\langle v_i|$$

пројектор на потпростор $\mathbb{W}$.

(а) Да би горе задата сума

$$\hat{P} = \sum_{i=1}^{m} |v_i\rangle\langle V_i|$$

била пројектор она мора бити идемпотетна и ермитска.

Идемпотетност се проверава квадрирањем датог оператора

$$\hat{P}^2 = \hat{P}\hat{P} = \left(\sum_{i=1}^{m} |v_i\rangle\langle V_i|\right)\left(\sum_{j=1}^{m} |v_j\rangle\langle V_j|\right) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} (|v_i\rangle\langle V_i|)(|v_j\rangle\langle V_j|) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} |v_i\rangle\langle V_i|v_j\rangle\langle V_j|.$$

Како је, према дефиницији, реципрочни базис биортогоналан на дати базис

$$\langle V_i|v_j\rangle = \delta_{ij},$$

следи

$$\hat{P}^2 = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} |v_i\rangle\delta_{ij}\langle V_j|.$$

Будући да Кронекерово делта скида суму, биће

$$\hat{P}^2 = \sum_{i=1}^{m} |v_i\rangle\langle V_i| = \hat{P}$$

те је очигледно да је оператор идемпотентан.

Задати оператор мора бити и *ермитски*: $\hat{P}^\dagger = \hat{P}$. Да би се то проверило, формира се скаларни производ $\left\langle v_1 \middle| \hat{P} v_2 \right\rangle$, с тим што векторе $|v_1\rangle$ и $|v_2\rangle$ треба написати као линеарне комбинације базних вектора простора $\mathbb{C}^n$, што је већ рађено у ранијим поглављима

$$|v_1\rangle = \sum_{i=1}^{n} \xi_i |\mathrm{e}_i\rangle \quad \text{и} \quad |v_2\rangle = \sum_{i=1}^{n} \eta_i |\mathrm{e}_i\rangle .$$

Ликове вектора $|v_1\rangle$ и $|v_2\rangle$ након деловања оператора $\hat{P}$ треба сада одредити

$$\begin{aligned}
\hat{P}|v_1\rangle &= \left(\sum_{i=1}^{m} |v_i\rangle\langle V_i|\right)\left(\sum_{j=1}^{n} \xi_j |\mathrm{e}_j\rangle\right) = \left(\sum_{i=1}^{m} |v_i\rangle\langle V_i|\right)\left(\sum_{j=1}^{m} \xi_j |\mathrm{e}_j\rangle + \sum_{j=m+1}^{n} \xi_j |\mathrm{e}_j\rangle\right) \\
&= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} |v_i\rangle\langle V_i|\, \xi_j |\mathrm{e}_j\rangle + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=m+1}^{n} |v_i\rangle\langle V_i|\, \xi_j |\mathrm{e}_j\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} \xi_j |v_i\rangle\langle V_i|\mathrm{e}_j\rangle + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=m+1}^{n} \xi_j |v_i\rangle\langle V_i|\mathrm{e}_j\rangle
\end{aligned}$$

Опет се јавља Кронекерово делта, те горњи израз поприма следећи облик

$$\hat{P}|v_1\rangle = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} \xi_j |v_i\rangle \delta_{ij} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=m+1}^{n} \xi_j |v_i\rangle \delta_{ij} ,$$

с тим што у првом члану Кронекерово делта скида једну суму, а у другом његова вредност једнака је нули, пошто су индекси i и j увек различити, те бива

$$\hat{P}|v_1\rangle = \sum_{i=1}^{m} \xi_i |v_i\rangle .$$

На потпуно исти начин би се добио лик другог вектора, уз измену одговарајућих коефицијената

$$\hat{P}|v_2\rangle = \sum_{i=1}^{m} \eta_i |v_i\rangle .$$

Сада се може проверити ермитичност датог оператора; почиње се са левом страном дефиниционе формуле за адјунговане операторе

$$\left\langle v_1 \middle| \hat{P} v_2 \right\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} \xi_i \langle \mathrm{e}_i| \middle| \sum_{j=1}^{n} \eta_j |v_j\rangle \right\rangle = \sum_{i=1}^{m} \xi_i^* \left\langle \mathrm{e}_i \middle| \sum_{j=1}^{n} \eta_j |v_j\rangle \right\rangle = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \xi_i^* \eta_j \langle \mathrm{e}_i | v_j \rangle$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\xi_i^*\eta_j\left\langle \mathrm{e}_i \middle| v_j\right\rangle+\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=m+1}^{n}\xi_i^*\eta_j\left\langle \mathrm{e}_i \middle| v_j\right\rangle$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\xi_i^*\eta_j\,\delta_{ij}+\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=m+1}^{n}\xi_i^*\eta_j\,\delta_{ij}=\sum_{i=1}^{m}\xi_i^*\eta_i+\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=m+1}^{n}\xi_i^*\eta_j\,0=\sum_{i=1}^{m}\xi_i^*\eta_i$$

а наставља се са њеном десном страном

$$\left\langle \hat{P}v_1 \middle| v_2\right\rangle=\left\langle \sum_{i=1}^{n}\xi_i\left\langle v_i\right| \middle| \sum_{j=1}^{n}\eta_j\left|\mathrm{e}_j\right\rangle\right\rangle=\sum_{i=1}^{m}\xi_i^*\left\langle v_i \middle| \sum_{j=1}^{n}\eta_j\left|\mathrm{e}_j\right\rangle\right\rangle=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\xi_i^*\eta_j\left\langle v_i \middle| \mathrm{e}_j\right\rangle$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\xi_i^*\eta_j\left\langle v_i \middle| \mathrm{e}_j\right\rangle+\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=m+1}^{n}\xi_i^*\eta_j\left\langle v_i \middle| \mathrm{e}_j\right\rangle$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\xi_i^*\eta_j\,\delta_{ij}+\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=m+1}^{n}\xi_i^*\eta_j\,\delta_{ij}=\sum_{i=1}^{m}\xi_i^*\eta_i+\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=m+1}^{n}\xi_i^*\eta_j\,0=\sum_{i=1}^{m}\xi_i^*\eta_i$$

Како су лева и десна страна дефиниционог израза једнаке, то следи да је

$$\left\langle \hat{P}v_1 \middle| v_2\right\rangle=\left\langle v_1 \middle| \hat{P}v_2\right\rangle,$$

односно да је оператор $\hat{P}$ ермитски оператор

$$\hat{P}^\dagger=\hat{P}\,.$$

(а) и (б): Како је задати пројектор дат сумом чији је последњи индекс m, то он може пројектовати само у $m-$димензиони потпростор, а то значи у $\mathbb{W}=\mathbb{L}\left(\left|v_1\right\rangle,\left|v_2\right\rangle,\ldots,\left|v_m\right\rangle\right)$, јер су, нпр. добијени ликови

$$\hat{P}\left|v_1\right\rangle=\sum_{i=1}^{m}\xi_i\left|v_i\right\rangle \quad \text{и} \quad \hat{P}\left|v_2\right\rangle=\sum_{i=1}^{m}\eta_i\left|v_i\right\rangle$$

очигледно вектори који припадају поменутом потпростору, будући да представљају линеарне комбинације његових базних вектора.

(в) Задата сума биће пројектор

$$\hat{P}=\sum_{i=1}^{m}\left|v_i\right\rangle\left\langle v_i\right|$$

ако је идемпотетна и ермитска.

Немогућност степеновања проверава се преко квадрата задатог оператора

$$\hat{P}^2=\hat{P}\hat{P}=\left(\sum_{i=1}^{m}\left|v_i\right\rangle\left\langle v_i\right|\right)\left(\sum_{j=1}^{m}\left|v_j\right\rangle\left\langle v_j\right|\right)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\left(\left|v_i\right\rangle\left\langle v_i\right|\right)\left(\left|v_j\right\rangle\left\langle v_j\right|\right)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\left|v_i\right\rangle\left\langle v_i \middle| v_j\right\rangle\left\langle v_j\right|.$$

Како је реч о ортонормираном базису, мора да важи израз

$$\left\langle v_i \middle| v_j\right\rangle=\delta_{ij}\,,$$

те ће бити

$$\hat{P}^2 = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} |v_i\rangle \delta_{ij} \langle v_j| .$$

Како Кронекерово делта скида суму, следи

$$\hat{P}^2 = \sum_{i=1}^{m} |v_i\rangle\langle v_i| = \hat{P}$$

те је очигледно да је задати оператор идемпотентан.

Поменути оператор мора бити и *ермитски*: $\hat{P}^\dagger = \hat{P}$. Прво треба формирати скаларни производ $\langle v_1 | \hat{P} v_2 \rangle$, са векторима $|v_1\rangle$ и $|v_2\rangle$ написаним у облику линеарних комбинација базисних вектора простора $\mathbb{C}^n$, као и раније

$$|v_1\rangle = \sum_{i=1}^{n} \xi_i |\mathrm{e}_i\rangle \quad \text{и} \quad |v_2\rangle = \sum_{i=1}^{n} \eta_i |\mathrm{e}_i\rangle .$$

Сада се одређују ликови вектора $|v_1\rangle$ и $|v_2\rangle$ након деловања оператора $\hat{P}$

$$\begin{aligned}
\hat{P}|v_1\rangle &= \left(\sum_{i=1}^{m} |v_i\rangle\langle v_i|\right)\left(\sum_{j=1}^{n} \xi_j |\mathrm{e}_j\rangle\right) = \left(\sum_{i=1}^{m} |v_i\rangle\langle v_i|\right)\left(\sum_{j=1}^{m} \xi_j |\mathrm{e}_j\rangle + \sum_{j=m+1}^{n} \xi_j |\mathrm{e}_j\rangle\right) \\
&= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} |v_i\rangle\langle v_i| \, \xi_j |\mathrm{e}_j\rangle + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=m+1}^{n} |v_i\rangle\langle v_i| \, \xi_j |\mathrm{e}_j\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} \xi_j |v_i\rangle\langle v_i | \mathrm{e}_j\rangle + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=m+1}^{n} \xi_j |v_i\rangle\langle v_i | \mathrm{e}_j\rangle
\end{aligned}$$

Будући да се опет јавља Кронекерово делта, горњи израз постаје

$$\hat{P}|v_1\rangle = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} \xi_j |v_i\rangle \delta_{ij} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=m+1}^{n} \xi_j |v_i\rangle \delta_{ij} .$$

У првом члану Кронекерово делта скида једну суму, а у другом његова је вредност увек нула, јер су индекси i и j увек различити; следи

$$\hat{P}|v_1\rangle = \sum_{i=1}^{m} \xi_i |v_i\rangle .$$

На потпуно исти начин добија се лик другог вектора, уз измену одговарајућих коефицијената

$$\hat{P}|v_2\rangle = \sum_{i=1}^{m} \eta_i |v_i\rangle .$$

Ермитичност датог оператора се проверава тако што се почне с левом страном дефиниционе формуле за адјунговане операторе

$$\langle v_1 | \hat{P} v_2 \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} \xi_i \langle \mathrm{e}_i | \left| \sum_{j=1}^{n} \eta_j |v_j\rangle \right.\right\rangle = \sum_{i=1}^{m} \xi_i^* \left\langle \mathrm{e}_i \left| \sum_{j=1}^{n} \eta_j |v_j\rangle \right.\right\rangle = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \xi_i^* \eta_j \langle \mathrm{e}_i | v_j \rangle$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\xi_i^*\eta_j \left\langle \mathrm{e}_i \middle| v_j \right\rangle + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=m+1}^{n}\xi_i^*\eta_j \left\langle \mathrm{e}_i \middle| v_j \right\rangle$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\xi_i^*\eta_j\,\delta_{ij} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=m+1}^{n}\xi_i^*\eta_j\,\delta_{ij} = \sum_{i=1}^{m}\xi_i^*\eta_i + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=m+1}^{n}\xi_i^*\eta_j\,0 = \sum_{i=1}^{m}\xi_i^*\eta_i$$

Потом се наставља с њеном десном страном

$$\left\langle \hat{P}v_1 \middle| v_2 \right\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n}\xi_i \left\langle v_i \right| \middle| \sum_{j=1}^{n}\eta_j \left| \mathrm{e}_j \right\rangle \right\rangle = \sum_{i=1}^{m}\xi_i^* \left\langle v_i \middle| \sum_{j=1}^{n}\eta_j \left| \mathrm{e}_j \right\rangle \right\rangle = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\xi_i^*\eta_j \left\langle v_i \middle| \mathrm{e}_j \right\rangle$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\xi_i^*\eta_j \left\langle v_i \middle| \mathrm{e}_j \right\rangle + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=m+1}^{n}\xi_i^*\eta_j \left\langle v_i \middle| \mathrm{e}_j \right\rangle$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\xi_i^*\eta_j\,\delta_{ij} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=m+1}^{n}\xi_i^*\eta_j\,\delta_{ij} = \sum_{i=1}^{m}\xi_i^*\eta_i + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=m+1}^{n}\xi_i^*\eta_j\,0 = \sum_{i=1}^{m}\xi_i^*\eta_i$$

Лева и десна страна дефиниционог израза су једнаке, па је

$$\left\langle \hat{P}v_1 \middle| v_2 \right\rangle = \left\langle v_1 \middle| \hat{P}v_2 \right\rangle,$$

одакле је очигледно да је оператор $\hat{P}$ ермитски оператор

$$\hat{P}^\dagger = \hat{P}\,.$$

(7.4) Вектори $\{|v_1\rangle, |v_2\rangle, \ldots, |v_m\rangle\}$ образују потпростор $\mathbb{W}$ унитарног простора $\mathbb{U}$. Одредити *ортонормирани базис* потпростора $\mathbb{W}$ а потом и *пројекторе* на потпростор $\mathbb{W}$ и његов ортокомплемент $\mathbb{W}^{\perp}$. Задатак одрадити у *апсолутном базису*, као и у базису чији је подскуп добијени ортонормирани базис у $\mathbb{W}$ - *адаптирани базис*

(а) $\mathbb{U} = \mathbb{R}^3$: $|v_1\rangle = (1,1,1)$;

(б) $\mathbb{U} = \mathbb{R}^3$: $\{|v_1\rangle = (1,0,0), |v_2\rangle = (1,1,0)\}$;

(в) $\mathbb{U} = \mathbb{C}^3$: $\{|v_1\rangle = (1,0,i), |v_2\rangle = (1,1,0)\}$;

(г) $\mathbb{U} = \mathbb{R}^4$: $\{|v_1\rangle = (1,0,0,1), |v_2\rangle = (2,1,1,2), |v_3\rangle = (1,1,-1,0)\}$.

Унитарни простор једнак је ортогоналној суми потпростора и његовог ортокомплемента; наведени су базис потпростора као и пројектор на њега, а потом и базис ортокомплемента и пројектор на исти

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbb{U} & = & \mathbb{W} & \oplus & \mathbb{W}^{\perp} \\
\{|v_1\rangle, |v_2\rangle, \ldots, |v_n\rangle\} & & \{|v_1\rangle, |v_2\rangle, \ldots, |v_m\rangle\} & & \{|v_{m+1}\rangle, |v_{m+2}\rangle, \ldots, |v_n\rangle\} \\
 & & \hat{P}_W = |v_1\rangle\langle v_1| + \ldots + |v_m\rangle\langle v_m| & & \hat{P}_{W^{\perp}} = |v_{m+1}\rangle\langle v_{m+1}| + \ldots + |v_n\rangle\langle v_n|
\end{array}$$

Јединични оператор

$$\hat{I} = \hat{P}_W + \hat{P}_{W^{\perp}}.$$

у адаптираном базису има следеће матричне облике, у зависности од броја димензија простора. Ако је простор 2Д: $\dim\mathbb{U} = 2$, онда димензије потпростора $\mathbb{W}$ и његовог ортокомплемента $\mathbb{W}^{\perp}$ морају бити једнаке 1, те горњој операторској формули одговара матрична

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

док у случају 3Д простора: $\dim\mathbb{U} = 3$ постоје две могућности

- потпростор $\mathbb{W}$ - 2Д, ортокомплемент $\mathbb{W}^{\perp}$ - 1Д,
- потпростор $\mathbb{W}$ - 1Д, ортокомплемент $\mathbb{W}^{\perp}$ - 2Д;

тада горњој операторској формули одговарају две матричне

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Очигледно је да број јединица на главној дијагонали матрица којима су представљени оператори $\hat{P}_W$ и $\hat{P}_{W^{\perp}}$ одговара броју димензија $\mathbb{W}$ и $\mathbb{W}^{\perp}$.

(а) У овом случају укупан простор је 3Д: $\mathbb{U}=\mathbb{R}^3$. Према поставци задатка базис се састоји само од једног вектора $|v_1\rangle=(1,1,1)$ који образује 1Д потпростор $\mathbb{W}$. Поменути базис мора бити ортонормиран

$$|v_1\rangle^{\mathrm{n}}=\frac{|v_1\rangle}{\left\||v_1\rangle\right\|}=\frac{|v_1\rangle}{\sqrt{\langle v_1|v_1\rangle}}=\frac{(1,1,1)}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1).$$

Пројектор $\hat{P}_W$ на 1Д потпростор $\mathbb{W}$ са ортонормираним базисом добија се преко формуле добијене у задатку (7.6), уз узимање у обзир изоморфизма између ЛВП-а и простора матрица

$$\hat{P}_W=\sum_{i=1}^{1}|v_i\rangle^{\mathrm{n}}\,{}^{\mathrm{n}}\langle v_i|=|v_1\rangle^{\mathrm{n}}\,{}^{\mathrm{n}}\langle v_1| \to \left[\hat{P}_W\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 1 & 1\\1 & 1 & 1\end{bmatrix}.$$

На основу израза $\hat{I}=\hat{P}_W+\hat{P}_{W^\perp}$ пројектор на 2Д ортокомплемент $\mathbb{W}^\perp$ ће бити

$$\hat{P}_{W^\perp}=\hat{I}-\hat{P}_W \to \left[\hat{P}_{W^\perp}\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}-\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 1 & 1\\1 & 1 & 1\end{bmatrix}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\0 & 3 & 0\\0 & 0 & 3\end{bmatrix}-\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 1 & 1\\1 & 1 & 1\end{bmatrix}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2 & -1 & -1\\-1 & 2 & -1\\-1 & -1 & 2\end{bmatrix}.$$

Сада ће добијени оператори бити проверени преко свог деловања на векторе апсолутног базиса. Прво се делује пројектором $\hat{P}_W$

$$\hat{P}_W|\mathrm{e}_1\rangle \to \left[\hat{P}_W\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}\left[|\mathrm{e}_1\rangle\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 1 & 1\\1 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+\frac{1}{3}\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}+\frac{1}{3}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$\to \hat{P}_W|\mathrm{e}_1\rangle=\frac{1}{3}|\mathrm{e}_1\rangle+\frac{1}{3}|\mathrm{e}_2\rangle+\frac{1}{3}|\mathrm{e}_3\rangle$$

$$\hat{P}_W|\mathrm{e}_2\rangle \to \left[\hat{P}_W\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}\left[|\mathrm{e}_2\rangle\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 1 & 1\\1 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+\frac{1}{3}\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}+\frac{1}{3}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$\to \hat{P}_W|\mathrm{e}_2\rangle=\frac{1}{3}|\mathrm{e}_1\rangle+\frac{1}{3}|\mathrm{e}_2\rangle+\frac{1}{3}|\mathrm{e}_3\rangle$$

$$\hat{P}_W|\mathrm{e}_3\rangle \to \left[\hat{P}_W\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}\left[|\mathrm{e}_3\rangle\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 1 & 1\\1 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+\frac{1}{3}\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}+\frac{1}{3}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$\to \hat{P}_W|\mathrm{e}_3\rangle=\frac{1}{3}|\mathrm{e}_1\rangle+\frac{1}{3}|\mathrm{e}_2\rangle+\frac{1}{3}|\mathrm{e}_3\rangle$$

Из добијене три основне формуле репрезентовања на уобичајен начин добија се матрица којом се представља пројектор $\hat{P}_W$ у апсолутном базису

$$\left[\hat{P}_W\right]_{\{|e_i\rangle\}} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Потом се на векторе апсолутног базиса делује пројектором $\hat{P}_{W^\perp}$

$$\hat{P}_{W^\perp}|e_1\rangle \to \left[\hat{P}_{W^\perp}\right]_{\{|e_i\rangle\}}\left[|e_1\rangle\right]_{\{|e_i\rangle\}} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{2}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{-1}{3}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{-1}{3}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\to \hat{P}_{W^\perp}|e_1\rangle = \frac{2}{3}|e_1\rangle - \frac{1}{3}|e_2\rangle - \frac{1}{3}|e_3\rangle$$

$$\hat{P}_{W^\perp}|e_2\rangle \to \left[\hat{P}_{W^\perp}\right]_{\{|e_i\rangle\}}\left[|e_2\rangle\right]_{\{|e_i\rangle\}} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{-1}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{2}{3}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{-1}{3}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\to \hat{P}_{W^\perp}|e_2\rangle = -\frac{1}{3}|e_1\rangle + \frac{2}{3}|e_2\rangle - \frac{1}{3}|e_3\rangle$$

$$\hat{P}_{W^\perp}|e_3\rangle \to \left[\hat{P}_{W^\perp}\right]_{\{|e_i\rangle\}}\left[|e_3\rangle\right]_{\{|e_i\rangle\}} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{-1}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{-1}{3}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{2}{3}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\to \hat{P}_{W^\perp}|e_3\rangle = -\frac{1}{3}|e_1\rangle - \frac{1}{3}|e_2\rangle + \frac{2}{3}|e_3\rangle$$

одакле следи матрица којом се представља пројектор $\hat{P}_{W^\perp}$ у апсолутном базису

$$\left[\hat{P}_{W^\perp}\right]_{\{|e_i\rangle\}} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Сада треба добити матрице којима се пројектори $\hat{P}_W$ и $\hat{P}_{W^\perp}$ представљају у *адаптираном базису*, који се формира допуном вектора

$$|v_1\rangle^{\mathrm{n}} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$$

(базис 1Д потпростора $\mathbb{W}$) са два вектора $|v_2\rangle$ и $|v_3\rangle$ (биће базис 2Д ортокомплемента $\mathbb{W}^\perp$), који морају бити ортогонални на вектор $|v_1\rangle^{\mathrm{n}}$, рецимо

$$|v_2\rangle = (0,-1,1) \quad \text{и} \quad |v_3\rangle = (-1,0,1).$$

Ова векторе сада треба ортонормирати Грам-Шмитовим поступком, прво други

$$|v_2\rangle^{\mathrm{n}} = \frac{|v_2\rangle - {}^{\mathrm{n}}\langle v_1|v_2\rangle|v_1\rangle^{\mathrm{n}}}{\left\| |v_2\rangle - {}^{\mathrm{n}}\langle v_1|v_2\rangle|v_1\rangle^{\mathrm{n}} \right\|} = \frac{(0,-1,1) - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1),(0,-1,1)\right)\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)}{\left\|(0,-1,1) - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1),(0,-1,1)\right)\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)\right\|}$$

$$=\frac{(0,-1,1)-\frac{1}{3}\left(1\cdot 0+1\cdot(-1)+1\cdot 1\right)(1,1,1)}{\left\|(0,-1,1)-\frac{1}{3}\left(1\cdot 0+1\cdot(-1)+1\cdot 1\right)(1,1,1)\right\|}=\frac{(0,-1,1)-\frac{1}{3}0(1,1,1)}{\left\|(0,-1,1)-\frac{1}{3}0(1,1,1)\right\|}=\frac{(0,-1,1)}{\|(0,-1,1)\|}$$

$$=\frac{(0,-1,1)}{\sqrt{\langle(0,-1,1)|(0,-1,1)\rangle}}=\frac{(0,-1,1)}{\sqrt{0^2+(-1)^2+1^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}(0,-1,1)$$

а потом и трећи

$$|v_3\rangle^{\mathrm{n}}=\frac{|v_3\rangle-{}^{\mathrm{n}}\langle v_1|v_3\rangle|v_1\rangle^{\mathrm{n}}-{}^{\mathrm{n}}\langle v_2|v_3\rangle|v_2\rangle^{\mathrm{n}}}{\left\||v_3\rangle-{}^{\mathrm{n}}\langle v_1|v_3\rangle|v_1\rangle^{\mathrm{n}}-{}^{\mathrm{n}}\langle v_2|v_3\rangle|v_2\rangle^{\mathrm{n}}\right\|}$$

$$=\frac{(-1,0,1)-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1),(-1,0,1)\right)\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(0,-1,1),(-1,0,1)\right)\frac{1}{\sqrt{2}}(0,-1,1)}{\left\|(-1,0,1)-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1),(-1,0,1)\right)\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(0,-1,1),(-1,0,1)\right)\frac{1}{\sqrt{2}}(0,-1,1)\right\|}$$

$$=\frac{(-1,0,1)-\frac{1}{3}\left(1\cdot(-1)+1\cdot 0+1\cdot 1\right)(1,1,1)-\frac{1}{2}\left(0\cdot(-1)+(-1)\cdot 0+1\cdot 1\right)(0,-1,1)}{\left\|(-1,0,1)-\frac{1}{3}\left(1\cdot(-1)+1\cdot 0+1\cdot 1\right)(1,1,1)-\frac{1}{2}\left(0\cdot(-1)+(-1)\cdot 0+1\cdot 1\right)(0,-1,1)\right\|}$$

$$=\frac{(-1,0,1)-\frac{1}{3}0(1,1,1)-\frac{1}{2}1(0,-1,1)}{\left\|(-1,0,1)-\frac{1}{3}0(1,1,1)-\frac{1}{2}1(0,-1,1)\right\|}=\frac{(-1,0,1)-(0,-1/2,1/2)}{\|(-1,0,1)-(0,-1/2,1/2)\|}=\frac{\left(-1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}{\left\|\left(-1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\right\|}$$

$$=\frac{\left(-1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left\langle\left(-1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\middle|\left(-1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\right\rangle}}=\frac{\left(-1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{(-1)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}}=\frac{\left(-1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{6}}\frac{1}{2}(-2,1,1)=\frac{1}{\sqrt{6}}(-2,1,1)$$

Значи, вектори адаптираног базиса су следећи

$$|v_1\rangle^{\mathrm{n}}=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1),\ |v_2\rangle^{\mathrm{n}}=\frac{1}{\sqrt{2}}(0,-1,1),\ |v_3\rangle^{\mathrm{n}}=\frac{1}{\sqrt{6}}(-2,1,1).$$

Сада се делује прво оператором $\hat{P}_W$ на векторе адаптираног базиса

$$\hat{P}_W|v_1\rangle^{\mathrm{n}}\ \to\ \left[\hat{P}_W\right]_{\{|e_i\rangle\}}\left[|v_1\rangle^{\mathrm{n}}\right]_{\{|e_i\rangle\}}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=\frac{1}{3\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1\cdot1+1\cdot1+1\cdot1\\1\cdot1+1\cdot1+1\cdot1\\1\cdot1+1\cdot1+1\cdot1\end{bmatrix}=\frac{1}{3\sqrt{3}}\begin{bmatrix}3\\3\\3\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$

$$\to\ \hat{P}_W|v_1\rangle^{\mathrm{n}}=1|v_1\rangle^{\mathrm{n}}+0|v_2\rangle^{\mathrm{n}}+0|v_3\rangle^{\mathrm{n}}$$

$$\hat{P}_W\left|v_2\right\rangle^{\mathrm{n}} \rightarrow \left[\hat{P}_W\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}\left[\left|v_2\right\rangle^{\mathrm{n}}\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix} = \frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\cdot0+1\cdot(-1)+1\cdot1\\1\cdot0+1\cdot(-1)+1\cdot1\\1\cdot0+1\cdot(-1)+1\cdot1\end{bmatrix} = \frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\rightarrow\ \hat{P}_W\left|v_2\right\rangle^{\mathrm{n}} = 0\left|v_1\right\rangle^{\mathrm{n}} + 0\left|v_2\right\rangle^{\mathrm{n}} + 0\left|v_3\right\rangle^{\mathrm{n}}$$

$$\hat{P}_W\left|v_3\right\rangle^{\mathrm{n}} \rightarrow \left[\hat{P}_W\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}\left[\left|v_3\right\rangle^{\mathrm{n}}\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}-2\\1\\1\end{bmatrix} = \frac{1}{3\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1\cdot(-2)+1\cdot1+1\cdot1\\1\cdot(-2)+1\cdot1+1\cdot1\\1\cdot(-2)+1\cdot1+1\cdot1\end{bmatrix} = \frac{1}{3\sqrt{6}}\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\rightarrow\ \hat{P}_W\left|v_3\right\rangle^{\mathrm{n}} = 0\left|v_1\right\rangle^{\mathrm{n}} + 0\left|v_2\right\rangle^{\mathrm{n}} + 0\left|v_3\right\rangle^{\mathrm{n}}$$

те је, на основу три основне формуле репрезентовања, матрица којом се представља пројектор $\hat{P}_W$ у адаптираном базису дата као

$$\left[\hat{P}_W\right]_{\{|v_i\rangle^{\mathrm{n}}\}} = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}.$$

Потом се делује пројектором $\hat{P}_{W^\perp}$ на векторе адаптираног базиса

$$\hat{P}_{W^\perp}\left|v_1\right\rangle^{\mathrm{n}} \rightarrow \left[\hat{P}_{W^\perp}\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}\left[\left|v_1\right\rangle^{\mathrm{n}}\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} = \frac{1}{3\sqrt{3}}\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\rightarrow\ \hat{P}_{W^\perp}\left|v_1\right\rangle^{\mathrm{n}} = 0\left|v_1\right\rangle^{\mathrm{n}} + 0\left|v_2\right\rangle^{\mathrm{n}} + 0\left|v_3\right\rangle^{\mathrm{n}}$$

$$\hat{P}_{W^\perp}\left|v_2\right\rangle^{\mathrm{n}} \rightarrow \left[\hat{P}_{W^\perp}\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}\left[\left|v_2\right\rangle^{\mathrm{n}}\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix}$$

$$\rightarrow\ \hat{P}_{W^\perp}\left|v_2\right\rangle^{\mathrm{n}} = 0\left|v_1\right\rangle^{\mathrm{n}} + 1\left|v_2\right\rangle^{\mathrm{n}} + 0\left|v_3\right\rangle^{\mathrm{n}}$$

$$\hat{P}_{W^\perp}\left|v_3\right\rangle^{\mathrm{n}} \rightarrow \left[\hat{P}_{W^\perp}\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}\left[\left|v_3\right\rangle^{\mathrm{n}}\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}-2\\1\\1\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}-2\\1\\1\end{bmatrix}$$

$$\rightarrow\ \hat{P}_{W^\perp}\left|v_3\right\rangle^{\mathrm{n}} = 0\left|v_1\right\rangle^{\mathrm{n}} + 0\left|v_2\right\rangle^{\mathrm{n}} + 1\left|v_3\right\rangle^{\mathrm{n}}$$

Према добијене три основне формуле репрезентовања, матрица којом се представља пројектор $\hat{P}_{W^\perp}$ у адаптираном базису гласи

$$\left[\hat{P}_{W^\perp}\right]_{\{|v_i\rangle^{\mathrm{n}}\}} = \begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

Значи да и у адаптираном базису оба пројектора задовољавају правило о дељењу јединица по димензијама потпростора, односно збир $\hat{P}_W$ и $\hat{P}_{W^\perp}$ ће стварно дати $\hat{I}$

$$\left[\hat{P}_W\right]_{\{|v_i\rangle^{\mathrm{n}}\}} + \left[\hat{P}_{W^\perp}\right]_{\{|v_i\rangle^{\mathrm{n}}\}} = \underset{\dim \mathbb{W}=1}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}} + \underset{\dim \mathbb{W}^\perp = 2}{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \left[\hat{I}\right]_{\{|v_i\rangle^{\mathrm{n}}\}}.$$

(б) И у овом случају укупан простор је 3Д: $\mathbb{U} = \mathbb{R}^3$. Према поставци задатка, базис 2Д потпростора $\mathbb{W}$ састоји се од два вектора $|v_1\rangle = (1,0,0)$ и $|v_2\rangle = (1,1,0)$ које треба ортонормирати

$$|v_1\rangle^{\mathrm{n}} = \frac{|v_1\rangle}{\||v_1\rangle\|} = \frac{|v_1\rangle}{\sqrt{\langle v_1|v_1\rangle}} = \frac{(1,0,0)}{\sqrt{1^2+0^2+0^2}} = (1,0,0),$$

$$\begin{aligned} |v_2\rangle^{\mathrm{n}} &= \frac{|v_2\rangle - {}^{\mathrm{n}}\langle v_1|v_2\rangle |v_1\rangle^{\mathrm{n}}}{\left\||v_2\rangle - {}^{\mathrm{n}}\langle v_1|v_2\rangle |v_1\rangle^{\mathrm{n}}\right\|} = \frac{(1,1,0) - \big((1,0,0),(1,1,0)\big)(1,0,0)}{\left\|(1,1,0) - \big((1,0,0),(1,1,0)\big)(1,0,0)\right\|} \\ &= \frac{(1,1,0) - (1\cdot 1 + 0\cdot 1 + 0\cdot 0)(1,0,0)}{\left\|(1,1,0) - (1\cdot 1 + 0\cdot 1 + 0\cdot 0)(1,0,0)\right\|} = \frac{(1,1,0)-(1,0,0)}{\|(1,1,0)-(1,0,0)\|} = \frac{(0,1,0)}{\|(0,1,0)\|} \\ &= \frac{(0,1,0)}{\sqrt{\langle (0,1,0)|(0,1,0)\rangle}} = \frac{(0,1,0)}{\sqrt{0^2+1^2+0^2}} = (0,1,0) \end{aligned}$$

Добијена два вектора су уствари прва два вектора апсолутног базиса, те је потпростор $\mathbb{W}$ једнак $\mathbb{R}^2$; самим тим је јасно да је ортокомплемент једнак $\mathbb{R}$, а његов базис чини преостали вектор апсолутног базиса $|v_3\rangle^{\mathrm{n}} = (0,0,1)$.

Пројектор $\hat{P}_W$ на 2Д потпростор $\mathbb{W}$ са ортонормираним базисом добија се преко формуле добијене у задатку (7.6), уз узимање у обзир већ поменутог изоморфизма

$$\hat{P}_W = \sum_{i=1}^{2} |v_i\rangle^{\mathrm{n}}\,{}^{\mathrm{n}}\langle v_i| = |v_1\rangle^{\mathrm{n}}\,{}^{\mathrm{n}}\langle v_1| + |v_2\rangle^{\mathrm{n}}\,{}^{\mathrm{n}}\langle v_2|$$

$$\rightarrow \left[\hat{P}_W\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}} = \left[\hat{P}_W\right]_{\{|v_i\rangle^{\mathrm{n}}\}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

док ће пројектор $\hat{P}_{W^\perp}$ на 1Д ортокомплемент $\mathbb{W}^\perp$ бити једнак

$$\hat{P}_{W^\perp} = \sum_{i=3}^{3} |v_i\rangle^{\mathrm{n}}\,{}^{\mathrm{n}}\langle v_i| = |v_3\rangle^{\mathrm{n}}\,{}^{\mathrm{n}}\langle v_3| \rightarrow \left[\hat{P}_{W^\perp}\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}} = \left[\hat{P}_{W^\perp}\right]_{\{|v_i\rangle^{\mathrm{n}}\}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Добијени изрази представљају пројекторе $\hat{P}_W$ и $\hat{P}_{W^\perp}$ у оба, и апсолутном и адаптираном базису, будући да је већ уочено да се поменути базиси подударају

$$\left\{|v_1\rangle^{\mathrm{n}}, |v_2\rangle^{\mathrm{n}}, |v_3\rangle^{\mathrm{n}}\right\} = \{|\mathrm{e}_1\rangle, |\mathrm{e}_2\rangle, |\mathrm{e}_3\rangle\}.$$

(в) Сада је укупан простор 3Д: $\mathbb{U}=\mathbb{C}^3$. Базис 2Д потпростора $\mathbb{W}$ чине два вектора $|v_1\rangle=(1,0,i)$ и $|v_2\rangle=(1,1,0)$, с тим што се они морају ортонормирати

$$|v_2\rangle^{\mathrm{n}}=\frac{|v_2\rangle}{\||v_2\rangle\|}=\frac{|v_2\rangle}{\sqrt{\langle v_2|v_2\rangle}}=\frac{(1,1,0)}{\sqrt{\langle(1,1,0)|(1,1,0)\rangle}}=\frac{(1,1,0)}{\sqrt{1\cdot1+1\cdot1+0\cdot0}}=\frac{1}{\sqrt2}(1,1,0),$$

$$|v_1\rangle^{\mathrm{n}}=\frac{|v_1\rangle-{}^{\mathrm{n}}\langle v_2|v_1\rangle|v_2\rangle^{\mathrm{n}}}{\left\||v_1\rangle-{}^{\mathrm{n}}\langle v_2|v_1\rangle|v_2\rangle^{\mathrm{n}}\right\|}=\frac{(1,0,i)-\left(\frac{1}{\sqrt2}(1,1,0),(1,0,i)\right)\frac{1}{\sqrt2}(1,1,0)}{\left\|(1,0,i)-\left(\frac{1}{\sqrt2}(1,1,0),(1,0,i)\right)\frac{1}{\sqrt2}(1,1,0)\right\|}$$

$$=\frac{(1,0,i)-\frac12\left(1\cdot1^*+1\cdot0^*+0\cdot i^*\right)(1,1,0)}{\left\|(1,0,i)-\frac12\left(1\cdot1^*+1\cdot0^*+0\cdot i^*\right)(1,1,0)\right\|}=\frac{(1,0,i)-\frac12(1,1,0)}{\left\|(1,0,i)-\frac12(1,1,0)\right\|}=\frac{(1/2,-1/2,i)}{\|(1/2,-1/2,i)\|}$$

$$=\frac{(1/2,-1/2,i)}{\sqrt{\langle(1/2,-1/2,i)|(1/2,-1/2,i)\rangle}}=\frac{(1/2,-1/2,i)}{\sqrt{\left(\frac12\right)^2+\left(-\frac12\right)^2+i\cdot i^*}}=\frac{(1/2,-1/2,i)}{\sqrt{\frac14+\frac14+1}}$$

$$=\frac{2}{\sqrt6}\frac12(1,-1,2i)=\frac{1}{\sqrt6}(1,-1,2i)$$

Пројектор $\hat P_W$ на 2Д потпростор $\mathbb{W}$ са ортонормираним базисом добија се на уобичајен начин

$$\hat P_W=\sum_{i=1}^{2}|v_i\rangle^{\mathrm{n}\,\mathrm{n}}\langle v_i|=|v_1\rangle^{\mathrm{n}\,\mathrm{n}}\langle v_1|+|v_2\rangle^{\mathrm{n}\,\mathrm{n}}\langle v_2|$$

$$\rightarrow\left[\hat P_W\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}=\frac{1}{\sqrt2}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt2}\begin{bmatrix}1&1&0\end{bmatrix}+\frac{1}{\sqrt6}\begin{bmatrix}1\\-1\\2i\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt6}\begin{bmatrix}1&-1&2i\end{bmatrix}=\frac12\begin{bmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}+\frac16\begin{bmatrix}1&-1&2i\\-1&1&-2i\\2i&-2i&-4\end{bmatrix}$$

$$=\frac16\begin{bmatrix}3&3&0\\3&3&0\\0&0&0\end{bmatrix}+\frac16\begin{bmatrix}1&-1&2i\\-1&1&-2i\\2i&-2i&-4\end{bmatrix}=\frac16\begin{bmatrix}4&2&2i\\2&4&-2i\\2i&-2i&-4\end{bmatrix}=\frac13\begin{bmatrix}2&1&i\\1&2&-i\\i&-i&-2\end{bmatrix}$$

док ће пројектор $\hat P_{W^\perp}$ на 1Д ортокомплемент $\mathbb{W}^\perp$ бити једнак

$$\hat P_{W^\perp}=\hat I-\hat P_W$$

$$\rightarrow\left[\hat P_{W^\perp}\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}-\frac13\begin{bmatrix}2&1&i\\1&2&-i\\i&-i&-2\end{bmatrix}=\frac13\begin{bmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{bmatrix}-\frac13\begin{bmatrix}2&1&i\\1&2&-i\\i&-i&-2\end{bmatrix}=\frac13\begin{bmatrix}1&-1&-i\\-1&1&i\\-i&i&5\end{bmatrix}$$

Добијени изрази представљају пројекторе $\hat P_W$ и $\hat P_{W^\perp}$ у *апсолутном* базису. У адаптираном базису ће бити, као и увек, представљени дијагоналним квадратним матрицама код којих на главним дијагоналама има онолико јединица колика је димензионалност потпростора и његовог ортокомплемента, значи

$$\left[\hat{P}_W\right]_{\{|v_i\rangle^n\}}+\left[\hat{P}_{W^\perp}\right]_{\{|v_i\rangle^n\}}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\left[\hat{I}\right]_{\{|v_i\rangle^n\}}.$$

$$\dim\mathbb{W}=2 \qquad \dim\mathbb{W}^\perp=1$$

(г) Укупан простор у овом случају је 4Д: $\mathbb{U}=\mathbb{R}^4$. Базис 3Д потпростора $\mathbb{W}$ чине три задата вектора $|v_1\rangle=(1,0,0,1)$, $|v_2\rangle=(2,1,1,2)$ и $|v_3\rangle=(1,1,-1,0)$, које, наравно, треба ортонормирати

$$|v_1\rangle^n=\frac{|v_1\rangle}{\left\||v_1\rangle\right\|}=\frac{|v_1\rangle}{\sqrt{\langle v_1|v_1\rangle}}=\frac{(1,0,0,1)}{\sqrt{\langle(1,0,0,1)|(1,0,0,1)\rangle}}=\frac{(1,0,0,1)}{\sqrt{1\cdot1+0\cdot0+0\cdot0+1\cdot1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,0,1),$$

$$|v_2\rangle^n=\frac{|v_2\rangle-{}^n\langle v_1|v_2\rangle|v_1\rangle^n}{\left\||v_2\rangle-{}^n\langle v_1|v_2\rangle|v_1\rangle^n\right\|}=\frac{(2,1,1,2)-\left(\frac{1}{\sqrt2}(1,0,0,1),(2,1,1,2)\right)\frac{1}{\sqrt2}(1,0,0,1)}{\left\|(2,1,1,2)-\left(\frac{1}{\sqrt2}(1,0,0,1),(2,1,1,2)\right)\frac{1}{\sqrt2}(1,0,0,1)\right\|}$$

$$=\frac{(2,1,1,2)-\frac12(1\cdot2+0\cdot1+0\cdot1+1\cdot2)(1,0,0,1)}{\left\|(2,1,1,2)-\frac12(1\cdot2+0\cdot1+0\cdot1+1\cdot2)(1,0,0,1)\right\|}=\frac{(2,1,1,2)-2(1,0,0,1)}{\left\|(2,1,1,2)-2(1,0,0,1)\right\|}=\frac{(0,1,1,0)}{\left\|(0,1,1,0)\right\|}$$

$$=\frac{(0,1,1,0)}{\sqrt{\langle(0,1,1,0)|(0,1,1,0)\rangle}}=\frac{(0,1,1,0)}{\sqrt{0^2+1^2+1^2+0^2}}=\frac{1}{\sqrt2}(0,1,1,0)$$

$$|v_3\rangle^n=\frac{|v_3\rangle-{}^n\langle v_1|v_3\rangle|v_1\rangle^n-{}^n\langle v_2|v_3\rangle|v_2\rangle^n}{\left\||v_3\rangle-{}^n\langle v_1|v_3\rangle|v_1\rangle^n-{}^n\langle v_2|v_3\rangle|v_2\rangle^n\right\|}$$

$$=\frac{(1,1,-1,0)-\left(\frac{1}{\sqrt2}(1,0,0,1),(1,1,-1,0)\right)\frac{1}{\sqrt2}(1,0,0,1)-\left(\frac{1}{\sqrt2}(0,1,1,0),(1,1,-1,0)\right)\frac{1}{\sqrt2}(0,1,1,0)}{\left\|(1,1,-1,0)-\left(\frac{1}{\sqrt2}(1,0,0,1),(1,1,-1,0)\right)\frac{1}{\sqrt2}(1,0,0,1)-\left(\frac{1}{\sqrt2}(0,1,1,0),(1,1,-1,0)\right)\frac{1}{\sqrt2}(0,1,1,0)\right\|}$$

$$=\frac{(1,1,-1,0)-\frac12\left((1,0,0,1),(1,1,-1,0)\right)(1,0,0,1)-\frac12\left((0,1,1,0),(1,1,-1,0)\right)(0,1,1,0)}{\left\|(1,1,-1,0)-\frac12\left((1,0,0,1),(1,1,-1,0)\right)(1,0,0,1)-\frac12\left((0,1,1,0),(1,1,-1,0)\right)(0,1,1,0)\right\|}$$

$$=\frac{(1,1,-1,0)-\frac12 1(1,0,0,1)-\frac12 0(0,1,1,0)}{\left\|(1,1,-1,0)-\frac12 1(1,0,0,1)-\frac12 0(0,1,1,0)\right\|}=\frac{(1,1,-1,0)-\frac12(1,0,0,1)}{\left\|(1,1,-1,0)-\frac12(1,0,0,1)\right\|}=\frac{\left(\frac12,1,-1,-\frac12\right)}{\left\|\left(\frac12,1,-1,-\frac12\right)\right\|}$$

$$=\frac{\left(\frac12,1,-1,-\frac12\right)}{\sqrt{\left(\frac12\right)^2+1^2+(-1)^2+\left(-\frac12\right)^2}}=\frac{\left(\frac12,1,-1,-\frac12\right)}{\sqrt{\frac14+1+1+\frac14}}==\frac{2}{\sqrt{10}}\frac12(1,2,-2,-1)=\frac{1}{\sqrt{10}}(1,2,-2,-1)$$

Пројектор $\hat{P}_W$ на 2Д потпростор $\mathbb{W}$ са ортонормираним базисом добија се преко већ три пута коришћене формуле

$$\hat{P}_W = \sum_{i=1}^{3} |v_i\rangle^{\mathrm{n}}\, {}^{\mathrm{n}}\langle v_i| = |v_1\rangle^{\mathrm{n}}\, {}^{\mathrm{n}}\langle v_1| + |v_2\rangle^{\mathrm{n}}\, {}^{\mathrm{n}}\langle v_2| + |v_3\rangle^{\mathrm{n}}\, {}^{\mathrm{n}}\langle v_3|$$

$$\rightarrow \left[\hat{P}_W\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0\\1\\1\\0\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0 & 1 & 1 & 0\end{bmatrix} + \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix}1\\2\\-2\\-1\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix}1 & 2 & -2 & -1\end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\1 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 1 & 0\\0 & 1 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} + \frac{1}{10}\begin{bmatrix}1 & 2 & -2 & -1\\2 & 4 & -4 & -2\\-2 & -4 & 4 & 2\\-1 & -2 & 2 & 1\end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{10}\begin{bmatrix}5 & 0 & 0 & 5\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\5 & 0 & 0 & 5\end{bmatrix} + \frac{1}{10}\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\0 & 5 & 5 & 0\\0 & 5 & 5 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} + \frac{1}{10}\begin{bmatrix}1 & 2 & -2 & -1\\2 & 4 & -4 & -2\\-2 & -4 & 4 & 2\\-1 & -2 & 2 & 1\end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{10}\begin{bmatrix}6 & 2 & -2 & 4\\2 & 9 & 1 & -2\\-2 & 1 & 9 & 2\\4 & -2 & 2 & 6\end{bmatrix}$$

док ће пројектор $\hat{P}_{W^\perp}$ на 1Д ортокомплемент $\mathbb{W}^\perp$ бити дат као

$$\hat{P}_{W^\perp} = \hat{I} - \hat{P}_W$$

$$\rightarrow \left[\hat{P}_{W^\perp}\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} - \frac{1}{10}\begin{bmatrix}6 & 2 & -2 & 4\\2 & 9 & 1 & -2\\-2 & 1 & 9 & 2\\4 & -2 & 2 & 6\end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{10}\begin{bmatrix}10 & 0 & 0 & 0\\0 & 10 & 0 & 0\\0 & 0 & 10 & 0\\0 & 0 & 0 & 10\end{bmatrix} - \frac{1}{10}\begin{bmatrix}6 & 2 & -2 & 4\\2 & 9 & 1 & -2\\-2 & 1 & 9 & 2\\4 & -2 & 2 & 6\end{bmatrix} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix}4 & -2 & 2 & -4\\-2 & 1 & -1 & 2\\2 & -1 & 1 & -2\\-4 & 2 & -2 & 4\end{bmatrix}$$

Ово су пројектори $\hat{P}_W$ и $\hat{P}_{W^\perp}$ у *апсолутном* базису. У адаптираном базису је, као и пре

$$\left[\hat{P}_W\right]_{\{|v_i\rangle^{\mathrm{n}}\}} + \left[\hat{P}_{W^\perp}\right]_{\{|v_i\rangle^{\mathrm{n}}\}} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} = \left[\hat{I}\right]_{\{|v_i\rangle^{\mathrm{n}}\}}.$$

$$\dim \mathbb{W} = 3 \qquad\qquad \dim \mathbb{W}^\perp = 1$$

(7.5) Нека су $\mathbb{W}_1$ и $\mathbb{W}_2$ два потпростора образована векторима $\{|w_1\rangle_1, |w_2\rangle_1, \dots, |w_m\rangle_1\}$ и $\{|w_1\rangle_2, |w_2\rangle_2, \dots, |w_n\rangle_2\}$. Одредити *матрице* којима се представљају *пројектори* на поменуте потпросторе у апсолутном базису. Проверити да ли такве матрице комутирају, а потом одредити и пројекторе на $\mathbb{W}_1 \cap \mathbb{W}_2$, $\mathbb{W}_1 + \mathbb{W}_2$, $\mathbb{W}_1'$ и $\mathbb{W}_2'$, дефинисане као и у задатку **(7.2)**, $\mathbb{W}_1 = (\mathbb{W}_1 \cap \mathbb{W}_2) \oplus \mathbb{W}_1'$ и $\mathbb{W}_2 = (\mathbb{W}_1 \cap \mathbb{W}_2) \oplus \mathbb{W}_2'$

(а) $\begin{array}{l} |w_1\rangle_1 = (1,1,1,1) \\ |w_2\rangle_1 = (1,1,0,0) \end{array}, \begin{array}{l} |w_1\rangle_2 = (1,-1,1,-1) \\ |w_2\rangle_2 = (1,0,0,-1) \end{array};$

(б) $\begin{array}{l} |w_1\rangle_1 = (1,1,i,i) \\ |w_2\rangle_1 = (1,1,1,1) \\ |w_3\rangle_1 = (1,0,i,0) \end{array}, \begin{array}{l} |w_1\rangle_2 = (1,-1,i,-i) \\ |w_2\rangle_2 = (1,-1,1,-1) \end{array};$

(в) $\begin{array}{l} |w_1\rangle_1 = (1,1,1,1) \\ |w_2\rangle_1 = (1,1,0,0) \end{array}, |w_1\rangle_2 = (0,0,1,1).$

(а) Прво се ортонормирају вектори из првог потпростора

$$|w_1\rangle_1^{\mathrm{n}} = \frac{|w_1\rangle_1}{\||w_1\rangle_1\|} = \frac{|w_1\rangle_1}{\sqrt{{}_1\langle w_1|w_1\rangle_1}} = \frac{(1,1,1,1)}{\sqrt{1^2+1^2+1^2+1^2}} = \frac{1}{2}(1,1,1,1),$$

$$|w_2\rangle_1^{\mathrm{n}} = \frac{|w_2\rangle_1 - {}_1^{\mathrm{n}}\langle w_1|w_2\rangle_1 |w_1\rangle_1^{\mathrm{n}}}{\left\||w_2\rangle_1 - {}_1^{\mathrm{n}}\langle w_1|w_2\rangle_1 |w_1\rangle_1^{\mathrm{n}}\right\|} = \frac{(1,1,0,0) - \left(\frac{1}{2}(1,1,1,1),(1,1,0,0)\right)\frac{1}{2}(1,1,1,1)}{\left\|(1,1,0,0) - \left(\frac{1}{2}(1,1,1,1),(1,1,0,0)\right)\frac{1}{2}(1,1,1,1)\right\|}$$

$$= \frac{(1,1,0,0)-\frac{1}{4}2(1,1,1,1)}{\left\|(1,1,0,0)-\frac{1}{4}2(1,1,1,1)\right\|} = \frac{(1,1,0,0)-\frac{1}{2}(1,1,1,1)}{\left\|(1,1,0,0)-\frac{1}{2}(1,1,1,1)\right\|} = \frac{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)}{\left\|\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)\right\|}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2}} = \sqrt{\frac{4}{4}}\frac{1}{2}(1,1,-1,-1) = \frac{1}{2}(1,1,-1,-1)$$

Значи да је потпростор $\mathbb{W}_1$ линеал над векторима $|w_1\rangle_1^{\mathrm{n}}$ и $|w_2\rangle_1^{\mathrm{n}}$

$$\mathbb{W}_1 = \mathbb{L}\left(|w_1\rangle_1^{\mathrm{n}}, |w_2\rangle_1^{\mathrm{n}}\right),$$

док је пројектор на овај потпростор једнак

$$\hat{P}_{W_1} = |w_1\rangle_1^{\mathrm{n}}\,{}_1^{\mathrm{n}}\langle w_1| + |w_2\rangle_1^{\mathrm{n}}\,{}_1^{\mathrm{n}}\langle w_2|$$

односно, узевши у обзир изоморфност између векторског и матричног простора, матрица којом се представља поменути пројектор у апсолутном базису биће једнака

$$\left[\hat{P}_{W_1}\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&1&1&1\end{bmatrix}+\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{bmatrix}\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&1&-1&-1\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix}+\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1&1&-1&-1\\1&1&-1&-1\\-1&-1&1&1\\-1&-1&1&1\end{bmatrix}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}2&2&0&0\\2&2&0&0\\0&0&2&2\\0&0&2&2\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&1&0&0\\1&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&1&1\end{bmatrix}$$

Потом се ортонормирају вектори из другог потпростора

$$|w_1\rangle_1^{\mathrm{n}}=\frac{|w_1\rangle_1}{\left\||w_1\rangle_1\right\|}=\frac{|w_1\rangle_1}{\sqrt{{}_1\langle w_1|w_1\rangle_1}}=\frac{(1,-1,1,-1)}{\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2+(-1)^2}}=\frac{1}{2}(1,-1,1,-1)\,,$$

$$|w_2\rangle_2^{\mathrm{n}}=\frac{|w_2\rangle_2-{}_2^{\mathrm{n}}\langle w_1|w_2\rangle_2|w_1\rangle_2^{\mathrm{n}}}{\left\||w_2\rangle_2-{}_2^{\mathrm{n}}\langle w_1|w_2\rangle_2|w_1\rangle_2^{\mathrm{n}}\right\|}=\frac{(1,0,0,-1)-\left(\frac{1}{2}(1,-1,1,-1),(1,0,0,-1)\right)\frac{1}{2}(1,-1,1,-1)}{\left\|(1,0,0,-1)-\left(\frac{1}{2}(1,-1,1,-1),(1,0,0,-1)\right)\frac{1}{2}(1,-1,1,-1)\right\|}$$

$$=\frac{(1,0,0,-1)-\frac{1}{4}2(1,-1,1,-1)}{\left\|(1,0,0,-1)-\frac{1}{4}2(1,-1,1,-1)\right\|}=\frac{(1,-1,1,-1)-\frac{1}{2}(1,0,0,-1)}{\left\|(1,-1,1,-1)-\frac{1}{2}(1,0,0,-1)\right\|}=\frac{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)}{\left\|\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)\right\|}$$

$$=\frac{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2}}=\sqrt{\frac{4}{4}}\frac{1}{2}(1,1,-1,-1)=\frac{1}{2}(1,1,-1,-1)$$

Потпростор $\mathbb{W}_2$ је линеал над векторима $|w_1\rangle_2^{\mathrm{n}}$ и $|w_2\rangle_2^{\mathrm{n}}$

$$\mathbb{W}_2=\mathbb{L}\left(|w_1\rangle_2^{\mathrm{n}},|w_2\rangle_2^{\mathrm{n}}\right),$$

а пројектор на поменути потпростор је

$$\hat{P}_{W_2}=|w_1\rangle_2^{\mathrm{n}}\,{}_2^{\mathrm{n}}\langle w_1|+|w_2\rangle_2^{\mathrm{n}}\,{}_2^{\mathrm{n}}\langle w_2|\,.$$

Ако се у обзир узме изоморфност између векторског и матричног простора, онда је матрица којом се представља поменути пројектор у апсолутном базису једнака

$$\left[\hat{P}_{W_2}\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{bmatrix}\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&-1&1&-1\end{bmatrix}+\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{bmatrix}\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&1&-1&-1\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1&-1&1&-1\\-1&1&-1&1\\1&-1&1&-1\\-1&1&-1&1\end{bmatrix}+\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1&1&-1&-1\\1&1&-1&-1\\-1&-1&1&1\\-1&-1&1&1\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&0&0&-1\\0&1&-1&0\\0&-1&1&0\\-1&0&0&1\end{bmatrix}$$

Сада треба проверити да ли пројектори $\hat{P}_{W_1}$ и $\hat{P}_{W_2}$ (односно њихове добијене репрезентационе матрице) комутирају

$$\left[\hat{P}_{W_1}\right]_{\{|e_i\rangle\}}\left[\hat{P}_{W_2}\right]_{\{|e_i\rangle\}}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&1&0&0\\1&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&1&1\end{bmatrix}\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&0&0&-1\\0&1&-1&0\\0&-1&1&0\\-1&0&0&1\end{bmatrix}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1&1&-1&-1\\1&1&-1&-1\\-1&-1&1&1\\-1&-1&1&1\end{bmatrix},$$

$$\left[\hat{P}_{W_2}\right]_{\{|e_i\rangle\}}\left[\hat{P}_{W_1}\right]_{\{|e_i\rangle\}}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&0&0&-1\\0&1&-1&0\\0&-1&1&0\\-1&0&0&1\end{bmatrix}\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&1&0&0\\1&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&1&1\end{bmatrix}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1&1&-1&-1\\1&1&-1&-1\\-1&-1&1&1\\-1&-1&1&1\end{bmatrix}.$$

Како су десне стране горњих израза једнаке, једнаке су и леве, што значи да матрице којима су представљени пројектори комутирају, односно да сами пројектори комутирају

$$\hat{P}_{W_1}\hat{P}_{W_2}=\hat{P}_{W_2}\hat{P}_{W_1}.$$

Пошто пројектори комутирају онда је њихов *производ* пројектор који произвољне векторе пројектује на *пресек* потпростора $\mathbb{W}_1$ и $\mathbb{W}_2$, при чему је пресек потпростора нормирани вектор који је заједнички за оба а то је $|w_2\rangle_2^n$

$$\hat{P}_{W_1\cap W_2}=\hat{P}_{W_1}\hat{P}_{W_2}=|w_2\rangle_2^n{}_2^n\langle w_2|\rightarrow\left[\hat{P}_{W_1\cap W_2}\right]_{\{|e_i\rangle\}}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{bmatrix}\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&1&-1&-1\end{bmatrix}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1&1&-1&-1\\1&1&-1&-1\\-1&-1&1&1\\-1&-1&1&1\end{bmatrix},$$

односно

$$\underline{\begin{cases}\mathbb{W}_1=\mathbb{L}\left(|w_1\rangle_1^n,|w_2\rangle_1^n\right)=\mathbb{L}\left(|w_1\rangle_1^n,|w_2\rangle_2^n\right)\\\mathbb{W}_2=\mathbb{L}\left(|w_1\rangle_2^n,|w_2\rangle_2^n\right)=\mathbb{L}\left(|w_1\rangle_2^n,|w_2\rangle_2^n\right)\end{cases}}\Rightarrow\mathbb{W}_1\cap\mathbb{W}_2=\mathbb{L}\left(|w_2\rangle_2^n\right).$$

На *збир* потпростора $\mathbb{W}_1$ и $\mathbb{W}_2$

$$\mathbb{W}_1+\mathbb{W}_2=\mathbb{L}\left(|w_1\rangle_1^n,|w_2\rangle_2^n\right)\cup\mathbb{L}\left(|w_1\rangle_2^n,|w_2\rangle_2^n\right)=\mathbb{L}\left(|w_1\rangle_1^n,|w_1\rangle_2^n,|w_2\rangle_2^n\right),$$

пројектује следећи пројектор

$$\hat{P}_{W_1+W_2}=|w_1\rangle_1^n{}_1^n\langle w_1|+|w_1\rangle_2^n{}_2^n\langle w_1|+|w_2\rangle_2^n{}_2^n\langle w_2|$$

илити, матрично

$$\hat{P}_{W_1+W_2} = |w_1\rangle_1^{\mathrm{n}}\,{}_1^{\mathrm{n}}\langle w_1| + |w_1\rangle_2^{\mathrm{n}}\,{}_2^{\mathrm{n}}\langle w_1| + |w_2\rangle_2^{\mathrm{n}}\,{}_2^{\mathrm{n}}\langle w_2|$$

$$\to \left[\hat{P}_{W_1+W_2}\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{bmatrix}\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & -1 & 1 & -1\end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{bmatrix}\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 1 & -1 & -1\end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}\left(\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\1 & 1 & 1 & 1\\1 & 1 & 1 & 1\\1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1 & -1 & 1 & -1\\-1 & 1 & -1 & 1\\1 & -1 & 1 & -1\\-1 & 1 & -1 & 1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1 & 1 & -1 & -1\\1 & 1 & -1 & -1\\-1 & -1 & 1 & 1\\-1 & -1 & 1 & 1\end{bmatrix}\right) = \frac{1}{4}\begin{bmatrix}3 & 1 & 1 & -1\\1 & 3 & -1 & 1\\1 & -1 & 3 & 1\\-1 & 1 & 1 & 3\end{bmatrix}$$

Потпростори $\mathbb{W}_1'$ и $\mathbb{W}_2'$ дефинишу се на следећи начин

$$\mathbb{W}_1 = (\mathbb{W}_1 \cap \mathbb{W}_2) \oplus \mathbb{W}_1' \;\Leftrightarrow\; \mathbb{L}\left(|w_1\rangle_1^{\mathrm{n}}, |w_2\rangle_2^{\mathrm{n}}\right) = \mathbb{L}\left(|w_2\rangle_2^{\mathrm{n}}\right) \oplus \mathbb{W}_1' \;\Rightarrow\; \mathbb{W}_1' = \mathbb{L}\left(|w_1\rangle_1^{\mathrm{n}}\right),$$

$$\mathbb{W}_2 = (\mathbb{W}_1 \cap \mathbb{W}_2) \oplus \mathbb{W}_2' \;\Leftrightarrow\; \mathbb{L}\left(|w_1\rangle_2^{\mathrm{n}}, |w_2\rangle_2^{\mathrm{n}}\right) = \mathbb{L}\left(|w_2\rangle_2^{\mathrm{n}}\right) \oplus \mathbb{W}_2' \;\Rightarrow\; \mathbb{W}_2' = \mathbb{L}\left(|w_1\rangle_2^{\mathrm{n}}\right),$$

те су стога пројектори на овакве потпросторе дати као

$$\hat{P}_{W_1'} = |w_1\rangle_1^{\mathrm{n}}\,{}_1^{\mathrm{n}}\langle w_1| \;\to\; \left[\hat{P}_{W_1'}\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\1 & 1 & 1 & 1\\1 & 1 & 1 & 1\\1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix},$$

$$\hat{P}_{W_2'} = |w_1\rangle_2^{\mathrm{n}}\,{}_2^{\mathrm{n}}\langle w_1| \;\to\; \left[\hat{P}_{W_2'}\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{bmatrix}\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & -1 & 1 & -1\end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix}1 & -1 & 1 & -1\\-1 & 1 & -1 & 1\\1 & -1 & 1 & -1\\-1 & 1 & -1 & 1\end{bmatrix}.$$

(б) Прво се ортонормирају вектори из првог потпростора

$$|w_3\rangle_1^{\mathrm{n}} = \frac{|w_3\rangle_1}{\left\||w_3\rangle_1\right\|} = \frac{|w_3\rangle_1}{\sqrt{{}_1\langle w_3|w_3\rangle_1}} = \frac{(1,0,i,0)}{\sqrt{1^*\cdot 1 + 0^*\cdot 0 + i^*\cdot i + 0^*\cdot 0}} = \frac{(1,0,i,0)}{\sqrt{1+(-i)i}} = \frac{(1,0,i,0)}{\sqrt{1-i^2}}$$

$$= \frac{(1,0,i,0)}{\sqrt{1-(-1)}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,i,0)$$

$$|w_1\rangle_1^{\mathrm{n}} = \frac{|w_1\rangle_1 - {}_1^{\mathrm{n}}\langle w_3|w_1\rangle_1\,|w_3\rangle_1^{\mathrm{n}}}{\left\||w_1\rangle_1 - {}_1^{\mathrm{n}}\langle w_3|w_1\rangle_1\,|w_3\rangle_1^{\mathrm{n}}\right\|} = \frac{(1,1,i,i) - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,i,0),(1,1,i,i)\right)\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,i,0)}{\left\|(1,1,i,i) - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,i,0),(1,1,i,i)\right)\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,i,0)\right\|}$$

$$= \frac{(1,1,i,i) - \frac{1}{2}2(1,0,i,0)}{\left\|(1,1,i,i) - \frac{1}{2}2(1,0,i,0)\right\|} = \frac{(1,1,i,i)-(1,0,i,0)}{\left\|(1,1,i,i)-(1,0,i,0)\right\|} = \frac{(0,1,0,i)}{\left\|(0,1,0,i)\right\|} = \frac{(0,1,0,i)}{\sqrt{1^*\cdot 1 + i^*\cdot i}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,0,i)$$

$$
\begin{aligned}
|w_2\rangle_1^{\mathrm{n}} &= \frac{|w_2\rangle_1 - {}_1^{\mathrm{n}}\langle w_3|w_2\rangle_1 |w_3\rangle_1^{\mathrm{n}} - {}_1^{\mathrm{n}}\langle w_1|w_2\rangle_1 |w_1\rangle_1^{\mathrm{n}}}{\left\| |w_2\rangle_1 - {}_1^{\mathrm{n}}\langle w_3|w_2\rangle_1 |w_3\rangle_1^{\mathrm{n}} - {}_1^{\mathrm{n}}\langle w_1|w_2\rangle_1 |w_1\rangle_1^{\mathrm{n}} \right\|} \\
&= \frac{(1,1,1,1) - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,i,0),(1,1,1,1)\right)\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,i,0) - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,0,i),(1,1,1,1)\right)\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,0,i)}{\left\|(1,1,1,1) - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,i,0),(1,1,1,1)\right)\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,i,0) - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,0,i),(1,1,1,1)\right)\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,0,i)\right\|} \\
&= \frac{(1,1,1,1) - \frac{1}{2}(1-i)(1,0,i,0) - \frac{1}{2}(1-i)(0,1,0,i)}{\left\|(1,1,1,1) - \frac{1}{2}(1-i)(1,0,i,0) - \frac{1}{2}(1-i)(0,1,0,i)\right\|} \\
&= \frac{(1,1,1,1) - \frac{1}{2}(1-i,0,1+i,0) - \frac{1}{2}(0,1-i,0,1+i)}{\left\|(1,1,1,1) - \frac{1}{2}(1-i,0,1+i,0) - \frac{1}{2}(0,1-i,0,1+i)\right\|} = \frac{\left(\frac{1+i}{2},\frac{1+i}{2},\frac{1-i}{2},\frac{1-i}{2}\right)}{\left\|\left(\frac{1+i}{2},\frac{1+i}{2},\frac{1-i}{2},\frac{1-i}{2}\right)\right\|} \\
&= \frac{\left(\frac{1+i}{2},\frac{1+i}{2},\frac{1-i}{2},\frac{1-i}{2}\right)}{\sqrt{\left(\frac{1+i}{2}\right)^*\left(\frac{1+i}{2}\right) + \left(\frac{1+i}{2}\right)^*\left(\frac{1+i}{2}\right) + \left(\frac{1-i}{2}\right)^*\left(\frac{1-i}{2}\right) + \left(\frac{1-i}{2}\right)^*\left(\frac{1-i}{2}\right)}} \\
&= \frac{\left(\frac{1+i}{2},\frac{1+i}{2},\frac{1-i}{2},\frac{1-i}{2}\right)}{\sqrt{\left(\frac{1-i}{2}\right)\left(\frac{1+i}{2}\right) + \left(\frac{1-i}{2}\right)\left(\frac{1+i}{2}\right) + \left(\frac{1+i}{2}\right)\left(\frac{1-i}{2}\right) + \left(\frac{1+i}{2}\right)\left(\frac{1-i}{2}\right)}} \\
&= \frac{\left(\frac{1+i}{2},\frac{1+i}{2},\frac{1-i}{2},\frac{1-i}{2}\right)}{\sqrt{4\frac{(1-i)(1+i)}{4}}} = \frac{\left(\frac{1+i}{2},\frac{1+i}{2},\frac{1-i}{2},\frac{1-i}{2}\right)}{\sqrt{1^2-i^2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}(1+i,1+i,1-i,1-i)
\end{aligned}
$$

Значи да је потпростор $\mathbb{W}_1$ линеал над векторима $|w_1\rangle_1^{\mathrm{n}}$, $|w_2\rangle_1^{\mathrm{n}}$ и $|w_3\rangle_1^{\mathrm{n}}$

$$\mathbb{W}_1 = \mathbb{L}\left(|w_1\rangle_1^{\mathrm{n}}, |w_2\rangle_1^{\mathrm{n}}, |w_3\rangle_1^{\mathrm{n}}\right),$$

док је пројектор на овај потпростор једнак

$$\hat{P}_{W_1} = |w_1\rangle_1^{\mathrm{n}}\, {}_1^{\mathrm{n}}\langle w_1| + |w_2\rangle_1^{\mathrm{n}}\, {}_1^{\mathrm{n}}\langle w_2| + |w_3\rangle_1^{\mathrm{n}}\, {}_1^{\mathrm{n}}\langle w_3|$$

односно, узевши у обзир изоморфност између векторског и матричног простора, матрица којом се представља поменути пројектор у апсолутном базису биће једнака

$$\left[\hat{P}_{W_1}\right]_{\{|e_i\rangle\}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0\\1\\0\\i\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & -i\end{bmatrix} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1+i\\1+i\\1-i\\1-i\end{bmatrix}\frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1-i & 1-i & 1+i & 1+i\end{bmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\0\\i\\0\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 0 & -i & 0\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&1&0&-i\\0&0&0&0\\0&i&0&-i^2\end{bmatrix}+\frac{1}{8}\begin{bmatrix}1-i^2&1-i^2&(1+i)^2&(1+i)^2\\1-i^2&1-i^2&(1+i)^2&(1+i)^2\\(1-i)^2&(1-i)^2&1-i^2&1-i^2\\(1-i)^2&(1-i)^2&1-i^2&1-i^2\end{bmatrix}+\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&0&-i&0\\0&0&0&0\\i&0&-i^2&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&1&0&-i\\0&0&0&0\\0&i&0&1\end{bmatrix}+\frac{1}{8}\begin{bmatrix}2&2&1+2i+i^2&1+2i+i^2\\2&2&1+2i+i^2&1+2i+i^2\\1-2i+i^2&1-2i+i^2&2&2\\1-2i+i^2&1-2i+i^2&2&2\end{bmatrix}+\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&0&-i&0\\0&0&0&0\\i&0&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&0&-i&0\\0&1&0&-i\\i&0&1&0\\0&i&0&1\end{bmatrix}+\frac{1}{8}\begin{bmatrix}2&2&2i&2i\\2&2&2i&2i\\-2i&-2i&2&2\\-2i&-2i&2&2\end{bmatrix}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}2&0&-2i&0\\0&2&0&-2i\\2i&0&2&0\\0&2i&0&2\end{bmatrix}+\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1&1&i&i\\1&1&i&i\\-i&-i&1&1\\-i&-i&1&1\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}3&1&-i&i\\1&3&i&-i\\i&-i&3&1\\-i&i&1&3\end{bmatrix}$$

Сада се ортонормирају вектори из другог потпростора

$$|w_2\rangle_2^{\mathrm{n}}=\frac{|w_2\rangle_2}{\left\||w_2\rangle_2\right\|}=\frac{|w_2\rangle_2}{\sqrt{{}_2\langle w_2|w_2\rangle_2}}=\frac{(1,-1,1,-1)}{\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2+(-1)^2}}=\frac{1}{2}(1,-1,1,-1)$$

$$|w_1\rangle_2^{\mathrm{n}}=\frac{|w_1\rangle_2-{}_2^{\mathrm{n}}\langle w_2|w_1\rangle_2|w_2\rangle_2^{\mathrm{n}}}{\left\||w_1\rangle_2-{}_2^{\mathrm{n}}\langle w_2|w_1\rangle_2|w_2\rangle_2^{\mathrm{n}}\right\|}=\frac{(1,-1,i,-i)-\left(\frac{1}{2}(1,-1,1,-1),(1,-1,i,-i)\right)\frac{1}{2}(1,-1,1,-1)}{\left\|(1,-1,i,-i)-\left(\frac{1}{2}(1,-1,1,-1),(1,-1,i,-i)\right)\frac{1}{2}(1,-1,1,-1)\right\|}$$

$$=\frac{(1,-1,i,-i)-\frac{2+2i}{4}(1,-1,1,-1)}{\left\|(1,-1,i,-i)-\frac{2+2i}{4}(1,-1,1,-1)\right\|}=\frac{(1,-1,i,-i)+\frac{-1-i}{2}(1,-1,1,-1)}{\left\|(1,-1,i,-i)+\frac{-1-i}{2}(1,-1,1,-1)\right\|}$$

$$=\frac{\left(1-\frac{1}{2}-\frac{i}{2},-1+\frac{1}{2}+\frac{i}{2},i-\frac{1}{2}-\frac{i}{2},-i+\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\right)}{\left\|\left(1-\frac{1}{2}-\frac{i}{2},-1+\frac{1}{2}+\frac{i}{2},i-\frac{1}{2}-\frac{i}{2},-i+\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\right)\right\|}=\frac{\left(\frac{1-i}{2},\frac{-1+i}{2},\frac{-1+i}{2},\frac{1-i}{2}\right)}{\left\|\left(\frac{1-i}{2},\frac{-1+i}{2},\frac{-1+i}{2},\frac{1-i}{2}\right)\right\|}$$

$$\frac{\left(\frac{1-i}{2},\frac{-1+i}{2},\frac{-1+i}{2},\frac{1-i}{2}\right)}{\left\|\left(\frac{1-i}{2},\frac{-1+i}{2},\frac{-1+i}{2},\frac{1-i}{2}\right)\right\|}$$

$$=\frac{\left(\frac{1-i}{2},\frac{-1+i}{2},\frac{-1+i}{2},\frac{1-i}{2}\right)}{\sqrt{\left(\frac{1-i}{2}\right)^*\left(\frac{1-i}{2}\right)+\left(\frac{-1+i}{2}\right)^*\left(\frac{-1+i}{2}\right)+\left(\frac{-1+i}{2}\right)^*\left(\frac{-1+i}{2}\right)+\left(\frac{1-i}{2}\right)^*\left(\frac{1-i}{2}\right)}}$$

$$=\frac{\left(\frac{1-i}{2},\frac{-1+i}{2},\frac{-1+i}{2},\frac{1-i}{2}\right)}{\sqrt{2\frac{1+i}{2}\frac{1-i}{2}+2\frac{-1-i}{2}\frac{-1+i}{2}}}=\frac{\left(\frac{1-i}{2},\frac{-1+i}{2},\frac{-1+i}{2},\frac{1-i}{2}\right)}{\sqrt{\frac{1+i-i-i^2+1+i-i-i^2}{2}}}=\frac{\left(\frac{1-i}{2},\frac{-1+i}{2},\frac{-1+i}{2},\frac{1-i}{2}\right)}{\sqrt{\frac{4}{2}}}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2}(1-i,-1+i,-1+i,1-i)=\frac{1}{2\sqrt{2}}(1-i,-1+i,-1+i,1-i)$$

Потпростор $\mathbb{W}_2$ је линеал над векторима $|w_1\rangle_2^{\mathrm{n}}$ и $|w_2\rangle_2^{\mathrm{n}}$

$$\mathbb{W}_2=\mathbb{L}\left(|w_1\rangle_2^{\mathrm{n}},|w_2\rangle_2^{\mathrm{n}}\right),$$

а пројектор на поменути потпростор је

$$\hat{P}_{W_2}=|w_1\rangle_2^{\mathrm{n}}\,{}_2^{\mathrm{n}}\langle w_1|+|w_2\rangle_2^{\mathrm{n}}\,{}_2^{\mathrm{n}}\langle w_2|.$$

Ако се у обзир узме изоморфност између векторског и матричног простора, онда је матрица којом се представља поменути пројектор у апсолутном базису једнака

$$\left[\hat{P}_{W_2}\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1-i\\-1+i\\-1+i\\1-i\end{bmatrix}\frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1+i & -1-i & -1-i & 1+i\end{bmatrix}+\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{bmatrix}\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & -1 & 1 & -1\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{8}\begin{bmatrix}(1-i)(1+i) & (1-i)(-1-i) & (1-i)(-1-i) & (1-i)(1+i)\\(-1+i)(1+i) & (-1+i)(-1-i) & (-1+i)(-1-i) & (-1+i)(1+i)\\(-1+i)(1+i) & (-1+i)(-1-i) & (-1+i)(-1-i) & (-1+i)(1+i)\\(1-i)(1+i) & (1-i)(-1-i) & (1-i)(-1-i) & (1-i)(1+i)\end{bmatrix}+\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1 & -1 & 1 & -1\\-1 & 1 & -1 & 1\\1 & -1 & 1 & -1\\-1 & 1 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{8}\begin{bmatrix}1-i+i-i^2 & -1+i-i+i^2 & -1+i-i+i^2 & 1-i+i-i^2\\-1+i-i+i^2 & 1-i+i-i^2 & 1-i+i-i^2 & -1+i-i+i^2\\-1+i-i+i^2 & 1-i+i-i^2 & 1-i+i-i^2 & -1+i-i+i^2\\1-i+i-i^2 & -1+i-i+i^2 & -1+i-i+i^2 & 1-i+i-i^2\end{bmatrix}+\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1 & -1 & 1 & -1\\-1 & 1 & -1 & 1\\1 & -1 & 1 & -1\\-1 & 1 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{8}\begin{bmatrix}2 & -2 & -2 & 2\\-2 & 2 & 2 & -2\\-2 & 2 & 2 & -2\\2 & -2 & -2 & 2\end{bmatrix}+\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1 & -1 & 1 & -1\\-1 & 1 & -1 & 1\\1 & -1 & 1 & -1\\-1 & 1 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{4}\left(\begin{bmatrix}1 & -1 & -1 & 1\\-1 & 1 & 1 & -1\\-1 & 1 & 1 & -1\\1 & -1 & -1 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & -1 & 1 & -1\\-1 & 1 & -1 & 1\\1 & -1 & 1 & -1\\-1 & 1 & -1 & 1\end{bmatrix}\right)=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}2 & -2 & 0 & 0\\-2 & 2 & 0 & 0\\0 & 0 & 2 & -2\\0 & 0 & -2 & 2\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & 0\\-1 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & -1\\0 & 0 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

Сада се проверава да ли пројектори $\hat{P}_{W_1}$ и $\hat{P}_{W_2}$ (односно њихове добијене репрезентационе матрице) комутирају

$$\left[\hat{P}_{W_1}\right]_{\{|e_i\rangle\}}\left[\hat{P}_{W_2}\right]_{\{|e_i\rangle\}}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}3&1&-i&i\\1&3&i&-i\\i&-i&3&1\\-i&i&1&3\end{bmatrix}\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&-1&0&0\\-1&1&0&0\\0&0&1&-1\\0&0&-1&1\end{bmatrix}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1&-1&-i&i\\-1&1&i&-i\\i&-i&1&-1\\-i&i&-1&1\end{bmatrix},$$

$$\left[\hat{P}_{W_2}\right]_{\{|e_i\rangle\}}\left[\hat{P}_{W_1}\right]_{\{|e_i\rangle\}}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&-1&0&0\\-1&1&0&0\\0&0&1&-1\\0&0&-1&1\end{bmatrix}\frac{1}{4}\begin{bmatrix}3&1&-i&i\\1&3&i&-i\\i&-i&3&1\\-i&i&1&3\end{bmatrix}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1&-1&-i&i\\-1&1&i&-i\\i&-i&1&-1\\-i&i&-1&1\end{bmatrix}.$$

Из горње две формуле је очигледно да матрице којима су представљени пројектори комутирају, тј. да сами пројектори комутирају

$$\hat{P}_{W_1}\hat{P}_{W_2}=\hat{P}_{W_2}\hat{P}_{W_1}.$$

Пошто пројектори комутирају онда је њихов *производ* пројектор који произвољне векторе пројектује на *пресек* потпростора $\mathbb{W}_1$ и $\mathbb{W}_2$, при чему је пресек потпростора нормирани вектор који је заједнички за оба потпростора, односно онај вектор који је линеарна комбинација век-тора $|w_1\rangle_1^{\mathrm{n}}$, $|w_2\rangle_1^{\mathrm{n}}$ и $|w_3\rangle_1^{\mathrm{n}}$ у првом потпростору и истовремено линеарна комбинација вектора $|w_1\rangle_2^{\mathrm{n}}$ и $|w_2\rangle_2^{\mathrm{n}}$ у другом потпростору

$$\alpha|w_1\rangle_1^{\mathrm{n}}+\beta|w_2\rangle_1^{\mathrm{n}}+\gamma|w_3\rangle_1^{\mathrm{n}}=\delta|w_2\rangle_1^{\mathrm{n}}+\varepsilon|w_2\rangle_2^{\mathrm{n}}$$

$$\Leftrightarrow \alpha\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,0,i)+\beta\frac{1}{2\sqrt{2}}(1+i,1+i,1-i,1-i)+\gamma\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,i,0)=\delta\frac{1}{2\sqrt{2}}(1-i,-1+i,-1+i,1-i)+\varepsilon\frac{1}{2}(1,-1,1,-1)$$

$$\Leftrightarrow 2\alpha(0,1,0,i)+\beta(1+i,1+i,1-i,1-i)+2\gamma(1,0,i,0)=\delta(1-i,-1+i,-1+i,1-i)+\varepsilon\sqrt{2}(1,-1,1,-1)$$

$$\Leftrightarrow(\beta+i\beta+2\gamma,2\alpha+\beta+i\beta,\beta-i\beta+2i\gamma,2i\alpha+\beta-i\beta)=(\delta-i\delta+\sqrt{2}\varepsilon,-\delta+i\delta-\sqrt{2}\varepsilon,-\delta+i\delta+\sqrt{2}\varepsilon,\delta-i\delta-\sqrt{2}\varepsilon)$$

Изједначавањем одговарајућих компоненти с леве и десне стране горњег израза, добија се систем једначина

$$\begin{cases}\beta+i\beta+2\gamma=\delta-i\delta+\sqrt{2}\varepsilon\\2\alpha+\beta+i\beta=-\delta+i\delta-\sqrt{2}\varepsilon\\\beta-i\beta+2i\gamma=-\delta+i\delta+\sqrt{2}\varepsilon\\2i\alpha+\beta-i\beta=\delta-i\delta-\sqrt{2}\varepsilon\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\beta+i\beta+2\gamma=\delta-i\delta+\sqrt{2}\varepsilon\\2\alpha+\beta+i\beta=-\delta+i\delta-\sqrt{2}\varepsilon\\2\alpha+2\beta+2i\gamma=-2\delta+2i\delta\\2i\alpha+2\beta+2\gamma=2\delta-2i\delta\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\beta+i\beta+2\gamma=\delta-i\delta+\sqrt{2}\varepsilon\\2\alpha+\beta+i\beta=-\delta+i\delta-\sqrt{2}\varepsilon\\\alpha+\beta+i\gamma=-\delta+i\delta\\i\alpha+\beta+\gamma=\delta-i\delta\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\beta+i\beta+2\gamma=\delta-i\delta+\sqrt{2}\varepsilon\\2\alpha+\beta+i\beta=-\delta+i\delta-\sqrt{2}\varepsilon\\\alpha+\beta+i\gamma=-\delta+i\delta\\\alpha+i\alpha+2\beta+\gamma+i\gamma=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\beta+i\beta+2\gamma=\delta-i\delta+\sqrt{2}\varepsilon\\2\alpha+\beta+i\beta=-\delta+i\delta-\sqrt{2}\varepsilon\\\alpha+\beta+i\gamma=-\delta+i\delta\\(\alpha+2\beta+\gamma)+i(\alpha+\gamma)=0+i0\end{cases}$$

Из последње једначине следе две

$$\begin{cases}\alpha+2\beta+\gamma=0\\ \alpha+\gamma=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha+2\beta+\gamma=0\\ \alpha=-\gamma\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-\gamma+2\beta+\gamma=0\\ \alpha=-\gamma\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2\beta=0\\ \alpha=-\gamma\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\beta=0\\ \alpha=-\gamma\end{cases}$$

Добијена два коефицијента се сада врате у полазни систем једначина

$$\begin{cases}0+i0+2\gamma=\delta-i\delta+\sqrt{2}\varepsilon\\ 2(-\gamma)+0+i0=-\delta+i\delta-\sqrt{2}\varepsilon\\ -\gamma+0+i\gamma=-\delta+i\delta\\ (-\gamma+2\cdot 0+\gamma)+i(-\gamma+\gamma)=0+i0\\ \alpha=-\gamma,\beta=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2\gamma=\delta-i\delta+\sqrt{2}\varepsilon\\ -2\gamma=-\delta+i\delta-\sqrt{2}\varepsilon\\ -\gamma+i\gamma=-\delta+i\delta\\ \alpha=-\gamma\\ \beta=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2\gamma=\delta-i\delta+\sqrt{2}\varepsilon\\ -2\gamma+\sqrt{2}\varepsilon=-\delta+i\delta\\ -\gamma+i\gamma=-\delta+i\delta\\ \alpha=-\gamma\\ \beta=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}2\gamma=\delta-i\delta+\sqrt{2}\varepsilon\\ -2\gamma+\sqrt{2}\varepsilon=-\gamma+i\gamma\\ -\gamma+i\gamma=-\delta+i\delta\\ \alpha=-\gamma\\ \beta=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2\gamma=\delta-i\delta+\sqrt{2}\varepsilon\\ -2\gamma+\sqrt{2}\varepsilon=-\gamma+i\gamma\\ \delta=\gamma\\ \alpha=-\gamma\\ \beta=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2\gamma=\delta-i\delta+\sqrt{2}\varepsilon\\ \sqrt{2}\varepsilon=\gamma+i\gamma\\ \delta=\gamma\\ \alpha=-\gamma\\ \beta=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}2\gamma=\gamma-i\gamma+\sqrt{2}\varepsilon\\ \sqrt{2}\varepsilon=\gamma+i\gamma\\ \delta=\gamma\\ \alpha=-\gamma\\ \beta=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\gamma+i\gamma=\sqrt{2}\varepsilon\\ \sqrt{2}\varepsilon=\gamma+i\gamma\\ \delta=\gamma\\ \alpha=-\gamma\\ \beta=0\end{cases}$$

Како четири од пет коефицијената зависе од коефицијента γ, он не сме бити једнак нули, али се може узети да је једнак јединици, чиме се добија

$$\begin{cases}\sqrt{2}\varepsilon=1+i\\ \sqrt{2}\varepsilon=1+i\\ \delta=1\\ \alpha=-1\\ \beta=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=-1\\ \beta=0\\ \gamma=1\\ \delta=1\\ \varepsilon=\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\end{cases}$$

те је тражени вектор једнак

$$(-1)\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,0,i)+0\frac{1}{2\sqrt{2}}(1+i,1+i,1-i,1-i)+1\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,i,0)=1\frac{1}{2\sqrt{2}}(1-i,-1+i,-1+i,1-i)+\frac{1+i}{\sqrt{2}}\frac{1}{2}(1,-1,1,-1)$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{\sqrt{2}}(0,-1,0,-i)+\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,i,0)=\frac{1}{2\sqrt{2}}(1-i,-1+i,-1+i,1-i)+\frac{1+i}{2\sqrt{2}}(1,-1,1,-1)$$

$$\Leftrightarrow(0,-1,0,-i)+(1,0,i,0)=\frac{1}{2}(1-i,-1+i,-1+i,1-i)+\frac{1+i}{2}(1,-1,1,-1)$$

$$\Leftrightarrow(1,-1,i,-i)=\left(\frac{1-i}{2},\frac{-1+i}{2},\frac{-1+i}{2},\frac{1-i}{2}\right)+\left(\frac{1+i}{2},\frac{-1-i}{2},\frac{1+i}{2},\frac{-1-i}{2}\right)$$

односно

$$(1,-1,i,-i)=\left(\frac{1-i+1+i}{2},\frac{-1+i-1-i}{2},\frac{-1+i+1+i}{2},\frac{1-i-1-i}{2}\right)$$
$$\Leftrightarrow (1,-1,i,-i)=\left(\frac{2}{2},\frac{-2}{2},\frac{2i}{2},\frac{-2i}{2}\right)\Leftrightarrow (1,-1,i,-i)=(1,-1,i,-i)$$

Значи, добијен је вектор кога сада треба нормирати

$$|w\rangle_{12}^{\mathrm{n}}=\frac{|w\rangle_{12}}{\left\||w\rangle_{12}\right\|}=\frac{|w\rangle_{12}}{\sqrt{{}_{12}\langle w|w\rangle_{12}}}=\frac{(1,-1,i,-i)}{\sqrt{1^*\cdot 1+(-1)^*(-1)+i^*i+(-i)^*(-i)}}$$
$$=\frac{(1,-1,i,-i)}{\sqrt{1^2+(-1)^2+(-i)i+i(-i)}}=\frac{(1,-1,i,-i)}{\sqrt{1+1-i^2-i^2}}=\frac{(1,-1,i,-i)}{\sqrt{1+1+1+1}}=\frac{1}{2}(1,-1,i,-i)$$

да би могао да образује *пресек* потпростора $\mathbb{W}_1$ и $\mathbb{W}_2$ (био његов базис)

$$\mathbb{W}_1\cap\mathbb{W}_2=\mathbb{L}\left(|w\rangle_{12}^{\mathrm{n}}\right).$$

Пројектор на овај пресек биће једнак

$$\hat{P}_{W_1\cap W_2}=\hat{P}_{W_1}\hat{P}_{W_2}=|w\rangle_{12}^{\mathrm{n}}\,{}_{12}^{\mathrm{n}}\langle w|\rightarrow\left[\hat{P}_{W_1\cap W_2}\right]_{\{|e_i\rangle\}}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\-1\\i\\-i\end{bmatrix}\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&-1&-i&i\end{bmatrix}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1&-1&-i&i\\-1&1&i&-i\\i&-i&1&-1\\-i&i&-1&1\end{bmatrix}.$$

На *збир* потпростора $\mathbb{W}_1$ и $\mathbb{W}_2$

$$\mathbb{W}_1+\mathbb{W}_2=\mathbb{L}\left(|w_1\rangle_1^{\mathrm{n}},|w_2\rangle_1^{\mathrm{n}},|w_3\rangle_1^{\mathrm{n}}\right)\cup\mathbb{L}\left(|w_1\rangle_2^{\mathrm{n}},|w_2\rangle_2^{\mathrm{n}}\right)=\mathbb{L}\left(|w_1\rangle_1^{\mathrm{n}},|w_2\rangle_1^{\mathrm{n}},|w_3\rangle_1^{\mathrm{n}},|w_1\rangle_2^{\mathrm{n}},|w_2\rangle_2^{\mathrm{n}}\right),$$

пројектује следећи пројектор - видети задатак **(7.3)**

$$\hat{P}_{W_1+W_2}=\hat{P}_{W_1}+\hat{P}_{W_2}-\hat{P}_{W_1}\hat{P}_{W_2}$$
$$\rightarrow\left[\hat{P}_{W_1+W_2}\right]_{\{|e_i\rangle\}}=\left[\hat{P}_{W_1}\right]_{\{|e_i\rangle\}}+\left[\hat{P}_{W_2}\right]_{\{|e_i\rangle\}}-\left[\hat{P}_{W_1}\hat{P}_{W_2}\right]_{\{|e_i\rangle\}}$$
$$=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}3&1&-i&i\\1&3&i&-i\\i&-i&3&1\\-i&i&1&3\end{bmatrix}+\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&-1&0&0\\-1&1&0&0\\0&0&1&-1\\0&0&-1&1\end{bmatrix}-\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1&-1&-i&i\\-1&1&i&-i\\i&-i&1&-1\\-i&i&-1&1\end{bmatrix}$$
$$=\frac{1}{4}\left(\begin{bmatrix}3&1&-i&i\\1&3&i&-i\\i&-i&3&1\\-i&i&1&3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2&-2&0&0\\-2&2&0&0\\0&0&2&-2\\0&0&-2&2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1&1&i&-i\\1&-1&-i&i\\-i&i&-1&1\\i&-i&1&-1\end{bmatrix}\right)$$
$$=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}4&0&0&0\\0&4&0&0\\0&0&4&0\\0&0&0&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}=\left[\hat{I}\right]_{\{|e_i\rangle\}}$$

На основу задатка **(7.4)**, ако пројектори $\hat{P}_{W_1}$ и $\hat{P}_{W_2}$ комутирају, онда је $\hat{P}_{W_1} - \hat{P}_{W_2} = \hat{P}_{W_1'}$ акко је $\mathbb{W}_1' \geq \mathbb{W}_2'$; како је то испуњено, биће

$$\hat{P}_{W_1'} = \hat{P}_{W_1} - \hat{P}_{W_2} \;\rightarrow\; \left[\hat{P}_{W_1'}\right]_{\{|e_i\rangle\}} = \left[\hat{P}_{W_1}\right]_{\{|e_i\rangle\}} - \left[\hat{P}_{W_2}\right]_{\{|e_i\rangle\}}$$

$$= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & 1 & -i & i \\ 1 & 3 & i & -i \\ i & -i & 3 & 1 \\ -i & i & 1 & 3 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\left(\begin{bmatrix} 3 & 1 & -i & i \\ 1 & 3 & i & -i \\ i & -i & 3 & 1 \\ -i & i & 1 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\begin{bmatrix} 3 & 1 & -i & i \\ 1 & 3 & i & -i \\ i & -i & 3 & 1 \\ -i & i & 1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 3 & -i & i \\ 3 & 1 & i & -i \\ i & -i & 1 & 3 \\ -i & i & 3 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

На основу задатка **(7.2)**, пројектори $\hat{P}_{W_1}$ и $\hat{P}_{W_2}$ комутирају ако су потпростори $\mathbb{W}_1'$ и $\mathbb{W}_2'$ међусобно ортогонални. Како пројектори $\hat{P}_{W_1}$ и $\hat{P}_{W_2}$ доиста комутирају, онда мора бити $\mathbb{W}_1' \perp \mathbb{W}_2'$, односно $\mathbb{W}_1' \oplus \mathbb{W}_2' = \mathbb{U}$, те је $\hat{P}_{W_1'} + \hat{P}_{W_2'} = \hat{I}$. Одатле следи

$$\hat{P}_{W_2'} = \hat{I} - \hat{P}_{W_1'} \;\rightarrow\; \left[\hat{P}_{W_2'}\right]_{\{|e_i\rangle\}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & -1 & i & -i \\ -1 & 1 & -i & i \\ -i & i & 1 & -1 \\ i & -i & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

(в) Као и до сада, прво се ортонормирају два вектора из првог потпростора

$$|w_2\rangle_1^{n} = \frac{|w_2\rangle_1}{\left\| |w_2\rangle_1 \right\|} = \frac{|w_2\rangle_1}{\sqrt{{}_1\langle w_2 | w_2\rangle_1}} = \frac{(1,1,0,0)}{\sqrt{1^2+1^2+0^2+0^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0,0)\,,$$

$$|w_1\rangle_1^{\mathrm{n}} = \frac{|w_1\rangle_1 - {}_1^{\mathrm{n}}\langle w_2|w_1\rangle_1 |w_2\rangle_1^{\mathrm{n}}}{\left\| |w_1\rangle_1 - {}_1^{\mathrm{n}}\langle w_2|w_1\rangle_1 |w_2\rangle_1^{\mathrm{n}} \right\|} = \frac{(1,1,1,1) - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0,0),(1,1,1,1)\right)\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0,0)}{\left\|(1,1,1,1) - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0,0),(1,1,1,1)\right)\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0,0)\right\|}$$

$$= \frac{(1,1,1,1) - \frac{1}{2}2(1,1,0,0)}{\left\|(1,1,1,1) - \frac{1}{2}2(1,1,0,0)\right\|} = \frac{(1,1,1,1)-(1,1,0,0)}{\|(1,1,1,1)-(1,1,0,0)\|} = \frac{(0,0,1,1)}{\|(0,0,1,1)\|}$$

$$= \frac{(0,0,1,1)}{\sqrt{0^2+0^2+1^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,0,1,1)$$

Потпростор $\mathbb{W}_1$ јесте линеал над векторима $|w_1\rangle_1^{\mathrm{n}}$ и $|w_2\rangle_1^{\mathrm{n}}$

$$\mathbb{W}_1 = \mathbb{L}\left(|w_1\rangle_1^{\mathrm{n}}, |w_2\rangle_1^{\mathrm{n}}\right),$$

док је пројектор на овај потпростор једнак

$$\hat{P}_{W_1} = |w_1\rangle_1^{\mathrm{n}}\,{}_1^{\mathrm{n}}\langle w_1| + |w_2\rangle_1^{\mathrm{n}}\,{}_1^{\mathrm{n}}\langle w_2|$$

односно, узевши у обзир изоморфност између векторског и матричног простора, матрица којом се представља поменути пројектор у апсолутном базису биће једнака

$$\left[\hat{P}_{W_1}\right]_{\{|e_i\rangle\}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&1\\0&0&1&1\end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&1&0&0\\1&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&1&0&0\\1&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&1&1\end{bmatrix}$$

Сада се ортонормира вектор из другог потпростора

$$|w_1\rangle_1^{\mathrm{n}} = \frac{|w_1\rangle_1}{\left\||w_1\rangle_1\right\|} = \frac{|w_1\rangle_1}{\sqrt{{}_1\langle w_1|w_1\rangle_1}} = \frac{(0,0,1,1)}{\sqrt{0^2+0^2+1^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,0,1,1).$$

Потпростор $\mathbb{W}_2$ је линеал над вектором $|w_1\rangle_2^{\mathrm{n}}$, а који је уствари први вектор из $\mathbb{W}_1$

$$\mathbb{W}_2 = \mathbb{L}\left(|w_1\rangle_2^{\mathrm{n}}\right) = \mathbb{L}\left(|w_1\rangle_1^{\mathrm{n}}\right),$$

док је пројектор на поменути потпростор једнак

$$\hat{P}_{W_2} = |w_1\rangle_2^{\mathrm{n}}\,{}_2^{\mathrm{n}}\langle w_1| = |w_1\rangle_1^{\mathrm{n}}\,{}_1^{\mathrm{n}}\langle w_1|.$$

Пошто су векторски и матрични простор изоморфни, матрица којом се представља поменути пројектор у апсолутном базису мора бити

$$\left[\hat{P}_{\mathbb{W}_2}\right]_{\{|e_i\rangle\}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&1\\0&0&1&1\end{bmatrix}.$$

Овде се проверава да ли пројектори $\hat{P}_{\mathbb{W}_1}$ и $\hat{P}_{\mathbb{W}_2}$ (односно њихове добијене репрезентационе матрице) комутирају

$$\left[\hat{P}_{\mathbb{W}_1}\right]_{\{|e_i\rangle\}}\left[\hat{P}_{\mathbb{W}_2}\right]_{\{|e_i\rangle\}} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&1&0&0\\1&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&1&1\end{bmatrix}\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&1\\0&0&1&1\end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&2&2\\0&0&2&2\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&1\\0&0&1&1\end{bmatrix},$$

$$\left[\hat{P}_{\mathbb{W}_2}\right]_{\{|e_i\rangle\}}\left[\hat{P}_{\mathbb{W}_1}\right]_{\{|e_i\rangle\}} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&1\\0&0&1&1\end{bmatrix}\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&1&0&0\\1&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&1&1\end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&2&2\\0&0&2&2\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&1\\0&0&1&1\end{bmatrix}.$$

Очигледно је да матрице којима су представљени пројектори комутирају, те самим тим и сами пројектори комутирају, при чему је њихов производ једнак пројектору на други потпростор

$$\hat{P}_{\mathbb{W}_1}\hat{P}_{\mathbb{W}_2} = \hat{P}_{\mathbb{W}_2}\hat{P}_{\mathbb{W}_1} = \hat{P}_{\mathbb{W}_2}\,.$$

Пошто пројектори комутирају онда је њихов *производ* пројектор који произвољне векторе пројектује на *пресек* потпростора $\mathbb{W}_1$ и $\mathbb{W}_2$

$$\hat{P}_{\mathbb{W}_1\cap\mathbb{W}_2} = \hat{P}_{\mathbb{W}_1}\hat{P}_{\mathbb{W}_2} = \hat{P}_{\mathbb{W}_2} = |w_1\rangle_2^{n}\,{}_2^{n}\langle w_1| \to \left[\hat{P}_{\mathbb{W}_1\cap\mathbb{W}_2}\right]_{\{|e_i\rangle\}} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&1\\0&0&1&1\end{bmatrix},$$

само, како је поменути производ једнак пројектору $\hat{P}_{\mathbb{W}_2}$, испада да је пресек дата два потпростора уствари потпростор $\mathbb{W}_2$

$$\mathbb{W}_1\cap\mathbb{W}_2 = \mathbb{W}_2 = \mathbb{L}\left(|w_1\rangle_2^{n}\right).$$

На *збир* потпростора $\mathbb{W}_1$ и $\mathbb{W}_2$

$$\mathbb{W}_1+\mathbb{W}_2 = \mathbb{L}\left(|w_1\rangle_1^{n},|w_2\rangle_1^{n}\right)\cup\mathbb{L}\left(|w_1\rangle_2^{n}\right) = \mathbb{L}\left(|w_1\rangle_1^{n},|w_2\rangle_1^{n}\right)\cup\mathbb{L}\left(|w_1\rangle_1^{n}\right) = \mathbb{L}\left(|w_1\rangle_1^{n},|w_2\rangle_1^{n}\right),$$

пројектује следећи пројектор

$$\hat{P}_{\mathbb{W}_1+\mathbb{W}_2} = |w_1\rangle_1^{n}\,{}_1^{n}\langle w_1| + |w_2\rangle_1^{n}\,{}_1^{n}\langle w_2|$$

илити, матрично

$$\left[\hat{P}_{W_1+W_2}\right]_{\{|e_i\rangle\}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0&0&1&1\end{bmatrix}+\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1&1&0&0\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&1\\0&0&1&1\end{bmatrix}+\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&1&0&0\\1&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&1&0&0\\1&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&1&1\end{bmatrix}$$

Потпростори $\mathbb{W}_1'$ и $\mathbb{W}_2'$ дефинисани су на следећи начин

$$\mathbb{W}_1=(\mathbb{W}_1\cap\mathbb{W}_2)\oplus\mathbb{W}_1' \Leftrightarrow \mathbb{L}\left(|w_1\rangle_1^{\mathrm{n}},|w_2\rangle_1^{\mathrm{n}}\right)=\mathbb{L}\left(|w_1\rangle_2^{\mathrm{n}}\right)\oplus\mathbb{W}_1'$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{L}\left(|w_1\rangle_1^{\mathrm{n}},|w_2\rangle_1^{\mathrm{n}}\right)=\mathbb{L}\left(|w_1\rangle_1^{\mathrm{n}}\right)\oplus\mathbb{W}_1' \Rightarrow \mathbb{W}_1'=\mathbb{L}\left(|w_2\rangle_1^{\mathrm{n}}\right)$$

$$\mathbb{W}_2=(\mathbb{W}_1\cap\mathbb{W}_2)\oplus\mathbb{W}_2' \Leftrightarrow \mathbb{L}\left(|w_1\rangle_2^{\mathrm{n}}\right)=\mathbb{L}\left(|w_1\rangle_2^{\mathrm{n}}\right)\oplus\mathbb{W}_2' \Rightarrow \mathbb{W}_2'=\mathbb{L}\left(|0\rangle\right),$$

одакле је јасно да су пројектори на овакве потпросторе следећег облика

$$\hat{P}_{W_1'}=|w_2\rangle_1^{\mathrm{n}}\,{}_1^{\mathrm{n}}\langle w_2| \to \left[\hat{P}_{W_1'}\right]_{\{|e_i\rangle\}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1&1&0&0\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&1&0&0\\1&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},$$

$$\hat{P}_{W_2'}=|0\rangle\langle 0| \to \left[\hat{P}_{W_2'}\right]_{\{|e_i\rangle\}}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

(7.6) Нека су у векторском простору $\mathbb{C}^3$ задати оператори

$$\hat{P}_{W_1}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\frac{1}{2}(2\xi_1,\xi_2-i\xi_3,i\xi_2+\xi_3)\,,$$

$$\hat{P}_{W_2}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\frac{1}{2}(\xi_1+i\xi_3,2\xi_2,-i\xi_1+\xi_3)\,.$$

Показати да су дати оператори *пројектори* и одредити њихове области ликова $\mathbb{W}_1$ и $\mathbb{W}_2$.

Проверити да ли дати оператори *комутирају* и наћи пројекторе на $\mathbb{W}_1\cap\mathbb{W}_2$ и $\mathbb{W}_1+\mathbb{W}_2$.

Да ли први задати оператор има две особине које мора имати сваки пројектор?

1. Идемпотентност

$$\begin{aligned}\hat{P}^2_{W_1}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)&=\left(\hat{P}_{W_1}\hat{P}_{W_1}\right)(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\hat{P}_{W_1}\left(\hat{P}_{W_1}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\right)\\&=\hat{P}_{W_1}\left(\frac{1}{2}(2\xi_1,\xi_2-i\xi_3,i\xi_2+\xi_3)\right)=\frac{1}{2}\hat{P}_{W_1}(2\xi_1,\xi_2-i\xi_3,i\xi_2+\xi_3)\end{aligned}$$

Замене ли се прва компонента вектора $2\xi_1$ са η_1, друга $\xi_2-i\xi_3$ са η_2 и трећа $i\xi_2+\xi_3$ са η_3, дефиниција првог оператора може се опет применити, чиме се добија

$$\begin{aligned}\hat{P}^2_{W_1}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)&=\frac{1}{2}\hat{P}_{W_1}(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=\frac{1}{2}\frac{1}{2}(2\eta_1,\eta_2-i\eta_3,i\eta_2+\eta_3)\\&=\frac{1}{4}(2\eta_1,\eta_2-i\eta_3,i\eta_2+\eta_3)\end{aligned}$$

након чега се новоуведене компоненте вектора враћају у првобитни облик

$$\begin{aligned}\hat{P}^2_{W_1}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)&=\frac{1}{4}\big(2\,2\xi_1,(\xi_2-i\xi_3)-i(i\xi_2+\xi_3),i(\xi_2-i\xi_3)+(i\xi_2+\xi_3)\big)\\&=\frac{1}{4}\big(4\xi_1,(1-i^2)\xi_2-2i\xi_3,2i\xi_2+(1-i^2)\xi_3\big)=\frac{1}{4}(4\xi_1,2\xi_2-2i\xi_3,2i\xi_2+2\xi_3)\\&=\frac{1}{2}(2\xi_1,\xi_2-i\xi_3,i\xi_2+\xi_3)=\hat{P}_{W_1}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\end{aligned}$$

одакле се, одбацивањем сувишног вектора у почетном и крајњем изразу, добија операторска једнакост

$$\hat{P}^2_{W_1}=\hat{P}_{W_1}$$

те је задати оператор заиста идемпотентан.

2. Ермитичност; прво се добије матрица којом се представља задати оператор у апсолутном базису

$$\begin{cases} \hat{P}_{W_1}|\mathrm{e}_1\rangle = \hat{P}_{W_1}(1,0,0) = \frac{1}{2}(2,0,0) = \frac{1}{2}\left(2|\mathrm{e}_1\rangle + 0|\mathrm{e}_2\rangle + 0|\mathrm{e}_3\rangle\right) \\ \hat{P}_{W_1}|\mathrm{e}_2\rangle = \hat{P}_{W_1}(0,1,0) = \frac{1}{2}(0,1,i) = \frac{1}{2}\left(0|\mathrm{e}_1\rangle + 1|\mathrm{e}_2\rangle + i|\mathrm{e}_3\rangle\right) \\ \hat{P}_{W_1}|\mathrm{e}_3\rangle = \hat{P}_{W_1}(0,0,1) = \frac{1}{2}(0,-i,1) = \frac{1}{2}\left(0|\mathrm{e}_1\rangle - i|\mathrm{e}_2\rangle + 1|\mathrm{e}_3\rangle\right) \end{cases} \Rightarrow \left[\hat{P}_{W_1}\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -i \\ 0 & i & 1 \end{bmatrix},$$

која се потом адјунгује; код матрица то значи да се прво матрични елементи комплексно коњугују, а потом се матрица транспонује - колоне полазне матрице запишу се као колоне крајње матрице

$$\left[\hat{P}^{\dagger}_{W_1}\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -i \\ 0 & i & 1 \end{bmatrix}^{\dagger} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -i^* \\ 0 & i^* & 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & i \\ 0 & -i & 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -i \\ 0 & i & 1 \end{bmatrix} = \left[\hat{P}_{W_1}\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}},$$

одакле је јасно да је матрица задатог оператора ермитска, а самим тим је, због изоморфности матричног и векторског простора, и сам оператор ермитски.

Како први задати оператор има особине идемпотентности и ермитичности, он представља пројектор.

Сада се обе потребне особине проверавају и за други оператор.

1. Идемпотентност

$$\begin{aligned} \hat{P}^2_{W_2}(\xi_1,\xi_2,\xi_3) &= \left(\hat{P}_{W_2}\hat{P}_{W_2}\right)(\xi_1,\xi_2,\xi_3) = \hat{P}_{W_2}\left(\hat{P}_{W_2}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\right) \\ &= \hat{P}_{W_2}\left(\frac{1}{2}(\xi_1 + i\xi_3, 2\xi_2, -i\xi_1 + \xi_3)\right) = \frac{1}{2}\hat{P}_{W_2}(\xi_1 + i\xi_3, 2\xi_2, -i\xi_1 + \xi_3) \end{aligned}$$

Након замене прве компоненте вектора $\xi_1 + i\xi_3$ са η_1, друге $2\xi_2$ са η_2 и треће $-i\xi_1 + \xi_3$ са η_3, дефиниција првог оператора примени се поново, те следи

$$\begin{aligned} \hat{P}^2_{W_2}(\xi_1,\xi_2,\xi_3) &= \frac{1}{2}\hat{P}_{W_2}(\eta_1,\eta_2,\eta_3) = \frac{1}{2}\frac{1}{2}(\eta_1 + i\eta_3, 2\eta_2, -i\eta_1 + \eta_3) \\ &= \frac{1}{4}(\eta_1 + i\eta_3, 2\eta_2, -i\eta_1 + \eta_3) \end{aligned}$$

након чега се новоуведене компоненте вектора врате у првобитни облик

$$\begin{aligned} \hat{P}^2_{W_2}(\xi_1,\xi_2,\xi_3) &= \frac{1}{4}\left((\xi_1 + i\xi_3) + i(-i\xi_1 + \xi_3), 2\,2\xi_2, -i(\xi_1 + i\xi_3) + (-i\xi_1 + \xi_3)\right) \\ &= \frac{1}{4}\left((1-i^2)\xi_1 + 2i\xi_3, 4\xi_2, -2i\xi_1 + (1-i^2)\xi_3\right) = \frac{1}{4}(2\xi_1 + 2i\xi_3, 4\xi_2, -2i\xi_1 + 2\xi_3) \\ &= \frac{1}{2}(\xi_1 + i\xi_3, 2\xi_2, -i\xi_1 + \xi_3) = \hat{P}_{W_2}(\xi_1,\xi_2,\xi_3) \end{aligned}$$

Након што се одбаци сувишни вектор на почетку и крају, следи операторска једнакост

$$\hat{P}^2_{W_2} = \hat{P}_{W_2}$$

те је и други задати оператор идемпотентан.

2. Ермитичност; матрица којом се представља други задати оператор у апсолутном базису добија се његовим деловањем на векторе апсолутног базиса

$$\begin{cases} \hat{P}_{W_2}\left|e_1\right\rangle = \hat{P}_{W_2}(1,0,0) = \frac{1}{2}(1,0,-i) = \frac{1}{2}\left(1\left|e_1\right\rangle + 0\left|e_2\right\rangle + (-i)\left|e_3\right\rangle\right) \\ \hat{P}_{W_2}\left|e_2\right\rangle = \hat{P}_{W_2}(0,1,0) = \frac{1}{2}(0,2,0) = \frac{1}{2}\left(0\left|e_1\right\rangle + 2\left|e_2\right\rangle + 0\left|e_3\right\rangle\right) \\ \hat{P}_{W_2}\left|e_3\right\rangle = \hat{P}_{W_2}(0,0,1) = \frac{1}{2}(i,0,1) = \frac{1}{2}\left(i\left|e_1\right\rangle + 0\left|e_2\right\rangle + 1\left|e_3\right\rangle\right) \end{cases} \Rightarrow \left[\hat{P}_{W_2}\right]_{\{|e_i\rangle\}} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 2 & 0 \\ -i & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Та матрица се затим адјунгује као и малопре, односно прво се њени матрични елементи комплексно коњугују, а потом се она транспонује - колоне полазне матрице запишу се као колоне крајње матрице

$$\left[\hat{P}_{W_2}^{\dagger}\right]_{\{|e_i\rangle\}} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 2 & 0 \\ -i & 0 & 1 \end{bmatrix}^{\dagger} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & i^* \\ 0 & 2 & 0 \\ -i^* & 0 & 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -i \\ 0 & 2 & 0 \\ i & 0 & 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 2 & 0 \\ -i & 0 & 1 \end{bmatrix} = \left[\hat{P}_{W_2}\right]_{\{|e_i\rangle\}}.$$

Значи да је матрица другог задатог оператора ермитска, односно, због изоморфности матричног и векторског простора, и сам оператор је ермитски.

И други задати оператор има особине идемпотентности и ермитичности, те такође јесте пројектор.

Сада се проверава да ли пројектори $\hat{P}_{W_1}$ и $\hat{P}_{W_2}$ (односно њихове добијене репрезентационе матрице) комутирају

$$\left[\hat{P}_{W_1}\right]_{\{|e_i\rangle\}}\left[\hat{P}_{W_2}\right]_{\{|e_i\rangle\}} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -i \\ 0 & i & 1 \end{bmatrix}\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 2 & 0 \\ -i & 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2i \\ -1 & 2 & -i \\ -i & 2i & 1 \end{bmatrix},$$

$$\left[\hat{P}_{W_2}\right]_{\{|e_i\rangle\}}\left[\hat{P}_{W_1}\right]_{\{|e_i\rangle\}} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 2 & 0 \\ -i & 0 & 1 \end{bmatrix}\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -i \\ 0 & i & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & -1 & i \\ 0 & 2 & -2i \\ -2i & i & 1 \end{bmatrix}.$$

Како десне стране горњих израза нису једнаке, нису једнаке су ни леве, што значи да матрице којима су представљени пројектори не комутирају, односно да сами пројектори не комутирају

$$\hat{P}_{W_1}\hat{P}_{W_2} \neq \hat{P}_{W_2}\hat{P}_{W_1}.$$

Област ликова оператора $\hat{P}_{W_1}$ може се одредити на следећи начин

$$\hat{P}_{W_1}|w\rangle_1 = |w\rangle_1 \;\Rightarrow\; \hat{P}_{W_1}(\xi_1,\xi_2,\xi_3) = (\xi_1,\xi_2,\xi_3) \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{2}(2\xi_1,\xi_2 - i\xi_3, i\xi_2 + \xi_3) = (\xi_1,\xi_2,\xi_3)$$

$$\Leftrightarrow\; (2\xi_1,\xi_2 - i\xi_3, i\xi_2 + \xi_3) = (2\xi_1, 2\xi_2, 2\xi_3)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\xi_1 = 2\xi_1 \\ \xi_2 - i\xi_3 = 2\xi_2 \\ i\xi_2 + \xi_3 = 2\xi_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \xi_1 = \xi_1 \\ \xi_2 = -i\xi_3 \\ i\xi_2 = \xi_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \xi_1 = \xi_1 \\ \xi_2 = -i\xi_3 \\ i(-i\xi_3) = \xi_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \xi_1 = \xi_1 \\ \xi_2 = -i\xi_3 \\ \xi_3 = \xi_3 \end{cases} \Rightarrow |w\rangle_1 = (\xi_1, -i\xi_3, \xi_3)$$

чиме је добијен општи облик лика пресликавања. Конкретни вектори добијају се узимањем најпростијих могућих вредности за компоненте вектора, рецимо $\xi_1 = 1$ и $\xi_3 = 0$ што даје први вектор $|w_1\rangle_1 = (1,0,0)$, а потом $\xi_1 = 0$ и $\xi_3 = 1$ чиме се добија други вектор $|w_2\rangle_1 = (0,-i,1)$. Ове векторе сада треба ортонормирати

$$|w_1\rangle_1^{\mathrm{n}} = \frac{|w_1\rangle_1}{\left\| |w_1\rangle_1 \right\|} = \frac{|w_1\rangle_1}{\sqrt{{}_1\langle w_1 | w_1\rangle_1}} = \frac{(1,0,0)}{\sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2}} = (1,0,0)\,,$$

$$|w_2\rangle_1^{\mathrm{n}} = \frac{|w_2\rangle_1 - {}_1^{\mathrm{n}}\langle w_1 | w_2\rangle_1 |w_1\rangle_1^{\mathrm{n}}}{\left\| |w_2\rangle_1 - {}_1^{\mathrm{n}}\langle w_1 | w_2\rangle_1 |w_1\rangle_1^{\mathrm{n}} \right\|} = \frac{(0,-i,1) - \big((1,0,0),(0,-i,1)\big)(1,0,0)}{\left\|(0,-i,1) - \big((1,0,0),(0,-i,1)\big)(1,0,0)\right\|}$$

$$= \frac{(0,-i,1) - 0\,(1,0,0)}{\left\|(0,-i,1) - 0\,(1,0,0)\right\|} = \frac{(0,-i,1)}{\left\|(0,-i,1)\right\|} = \frac{(0,-i,1)}{\sqrt{0^* \cdot 0 + (-i)^* \cdot (-i) + 1^* \cdot 1}}$$

$$= \frac{(0,-i,1)}{\sqrt{i(-i)+1}} = \frac{(0,-i,1)}{\sqrt{-i^2+1}} = \frac{(0,-i,1)}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,-i,1)$$

Ово значи да је потпростор $\mathbb{W}_1$ линеал над векторима $|w_1\rangle_1$ и $|w_2\rangle_1$

$$\mathbb{W}_1 = \mathbb{L}\left(|w_1\rangle_1^{\mathrm{n}}, |w_2\rangle_1^{\mathrm{n}}\right) = \left\{|w_1\rangle_1^{\mathrm{n}}, |w_2\rangle_1^{\mathrm{n}}\right\} = \left\{(1,0,0), \frac{1}{\sqrt{2}}(0,-i,1)\right\}.$$

Област ликова оператора $\hat{P}_{W_2}$ одређује се на исти начин

$$\hat{P}_{W_2}|w\rangle_2 = |w\rangle_2 \;\Rightarrow\; \hat{P}_{W_2}(\xi_1,\xi_2,\xi_3) = (\xi_1,\xi_2,\xi_3) \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{2}(\xi_1 + i\xi_3, 2\xi_2, -i\xi_1 + \xi_3) = (\xi_1,\xi_2,\xi_3)$$

$$\Leftrightarrow\; (\xi_1 + i\xi_3, 2\xi_2, -i\xi_1 + \xi_3) = (2\xi_1, 2\xi_2, 2\xi_3)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \xi_1 + i\xi_3 = 2\xi_1 \\ 2\xi_2 = 2\xi_2 \\ -i\xi_1 + \xi_3 = 2\xi_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \xi_1 = i\xi_3 \\ \xi_2 = \xi_2 \\ \xi_3 = -i\xi_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \xi_1 = i\xi_3 \\ \xi_2 = \xi_2 \\ \xi_3 = -i(i\xi_3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \xi_1 = i\xi_3 \\ \xi_2 = \xi_2 \\ \xi_3 = \xi_3 \end{cases} \Rightarrow |w\rangle_2 = (i\xi_3, \xi_2, \xi_3)$$

што даје општи облик лика пресликавања. Конкретни вектори добијају се узимањем најпростијих могућих вредности за компоненте вектора, рецимо $\xi_2 = 1$ и $\xi_3 = 0$ што даје први вектор $|w_1\rangle_2 = (0,1,0)$, а потом $\xi_2 = 0$ и $\xi_3 = 1$ чиме се добија други вектор $|w_2\rangle_2 = (i,0,1)$. Ове векторе сада треба ортонормирати

$$|w_1\rangle_2^{\mathrm{n}} = \frac{|w_1\rangle_2}{\||w_1\rangle_2\|} = \frac{|w_1\rangle_2}{\sqrt{{}_2\langle w_1|w_1\rangle_2}} = \frac{(0,1,0)}{\sqrt{0^2+1^2+0^2}} = (0,1,0),$$

$$|w_2\rangle_2^{\mathrm{n}} = \frac{|w_2\rangle_2 - {}_2^{\mathrm{n}}\langle w_1|w_2\rangle_2 |w_1\rangle_2^{\mathrm{n}}}{\left\||w_2\rangle_2 - {}_2^{\mathrm{n}}\langle w_1|w_2\rangle_2 |w_1\rangle_2^{\mathrm{n}}\right\|} = \frac{(i,0,1)-\big((0,1,0),(i,0,1)\big)(0,1,0)}{\left\|(i,0,1)-\big((0,1,0),(i,0,1)\big)(0,1,0)\right\|}$$

$$= \frac{(i,0,1)-0(0,1,0)}{\|(i,0,1)-0(0,1,0)\|} = \frac{(i,0,1)}{\|(i,0,1)\|} = \frac{(i,0,1)}{\sqrt{i^*\cdot i + 0^*\cdot 0 + 1^*\cdot 1}}$$

$$= \frac{(i,0,1)}{\sqrt{(-i)\,i+1}} = \frac{(i,0,1)}{\sqrt{-i^2+1}} = \frac{(i,0,1)}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(i,0,1).$$

Значи, потпростор $\mathbb{W}_2$ је линеал над векторима $|w_1\rangle_2$ и $|w_2\rangle_2$

$$\mathbb{W}_2 = \mathbb{L}\Big(|w_1\rangle_2^{\mathrm{n}}, |w_2\rangle_2^{\mathrm{n}}\Big) = \Big\{|w_1\rangle_2^{\mathrm{n}}, |w_2\rangle_2^{\mathrm{n}}\Big\} = \left\{(0,1,0), \frac{1}{\sqrt{2}}(i,0,1)\right\}.$$

Пресек потпростора $\mathbb{W}_1$ и $\mathbb{W}_2$ образован је вектором $|w\rangle_{12} = (a,b,c)$ који истовремено при-пада обема потпросторима - он је линеарна комбинација вектора $|w_1\rangle_1$ и $|w_2\rangle_1$, као и вектора $|w_1\rangle_2$ и $|w_2\rangle_2$

$$|w\rangle_{12} = |w\rangle_{12} \;\Rightarrow\; \alpha|w_1\rangle_1 + \beta|w_2\rangle_1 = \gamma|w_1\rangle_2 + \delta|w_2\rangle_2$$

$$\Leftrightarrow\; \alpha(1,0,0) + \beta\frac{1}{\sqrt{2}}(0,-i,1) = \gamma(0,1,0) + \delta\frac{1}{\sqrt{2}}(i,0,1) \;\Leftrightarrow\; \left(\alpha, \frac{-i\beta}{\sqrt{2}}, \frac{\beta}{\sqrt{2}}\right) = \left(\frac{i\delta}{\sqrt{2}}, \gamma, \frac{\delta}{\sqrt{2}}\right),$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = \dfrac{i\delta}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{-i\beta}{\sqrt{2}} = \gamma \\ \dfrac{\beta}{\sqrt{2}} = \dfrac{\delta}{\sqrt{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \dfrac{i\delta}{\sqrt{2}} \\ \gamma = \dfrac{-i\beta}{\sqrt{2}} \\ \beta = \delta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \dfrac{i\delta}{\sqrt{2}} \\ \gamma = \dfrac{-i\delta}{\sqrt{2}} \\ \beta = \delta \end{cases}$$

Како прва три коефицијента α, β, γ зависе од произвољног четвртог δ, може се узети да је он једнак јединици, чиме се добија да су коефицијенти развоја заједничког вектора

$$\alpha = \frac{i}{\sqrt{2}},\; \beta = 1,\; \gamma = \frac{-i}{\sqrt{2}},\; \delta = 1.$$

Сада треба одредити компоненте a, b и c поменутог вектора

$$|w\rangle_{12} = \alpha|w_1\rangle_1 + \beta|w_2\rangle_1 \;\Rightarrow\; |w\rangle_{12} = \frac{i}{\sqrt{2}}|w_1\rangle_1 + 1|w_2\rangle_1 \;\Leftrightarrow\; (a,b,c) = \frac{i}{\sqrt{2}}(1,0,0) + \frac{1}{\sqrt{2}}(0,-i,1)$$

$$\Leftrightarrow\; (a,b,c) = \left(\frac{i}{\sqrt{2}}, -\frac{i}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \;\Rightarrow\; a = \frac{i}{\sqrt{2}}, b = -\frac{i}{\sqrt{2}}, c = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

те је заједнички вектор за оба потпростора једнак

$$|w\rangle_{12} = \frac{1}{\sqrt{2}}(i,-i,1),$$

кога још треба нормирати

$$|w\rangle_{12}^{\mathrm{n}} = \frac{|w\rangle_{12}}{\||w\rangle_{12}\|} = \frac{|w\rangle_{12}}{\sqrt{{}_{12}\langle w|w\rangle_{12}}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}(i,-i,1)}{\sqrt{\left(\frac{i}{\sqrt{2}}\right)^{*}\left(\frac{i}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{-i}{\sqrt{2}}\right)^{*}\left(\frac{-i}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{*}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{(i,-i,1)}{\sqrt{\frac{i^{*}i+(-i)^{*}(-i)+1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2}\frac{(i,-i,1)}{\sqrt{(-i)i+i(-i)+1}} = \frac{(i,-i,1)}{\sqrt{-2i^{2}+1}} = \frac{(i,-i,1)}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}(i,-i,1)$$

У свом нормираном облику овај вектор представља базис пресека потпростора $\mathbb{W}_1$ и $\mathbb{W}_2$

$$\mathbb{W}_1 \cap \mathbb{W}_2 = \mathbb{L}\left(|w\rangle_{12}^{\mathrm{n}}\right) = \left\{|w\rangle_{12}^{\mathrm{n}}\right\} = \left\{\frac{1}{\sqrt{3}}(i,-i,1)\right\},$$

те је оператор који пројектује на овај пресек једнак

$$\hat{P}_{W_1\cap W_2} = |w\rangle_{12}^{\mathrm{n}}\,{}_{12}^{\mathrm{n}}\langle w| \to \left[\hat{P}_{W_1\cap W_2}\right]_{\{|e_i\rangle\}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} i \\ -i \\ 1 \end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} -i & i & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -1 & i \\ -1 & 1 & -i \\ -i & i & 1 \end{bmatrix}.$$

По дефиницији, *сума* два потпростора је унија $\mathbb{W}_1 \cup \mathbb{W}_2$, односно

$$\mathbb{W}_1 + \mathbb{W}_2 = \mathbb{L}\left(|w_1\rangle_1^{\mathrm{n}}, |w_2\rangle_1^{\mathrm{n}}\right) \cup \mathbb{L}\left(|w_1\rangle_2^{\mathrm{n}}, |w_2\rangle_2^{\mathrm{n}}\right) = \mathbb{L}\left(|w_1\rangle_1^{\mathrm{n}}, |w_2\rangle_1^{\mathrm{n}}, |w_1\rangle_2^{\mathrm{n}}, |w_2\rangle_2^{\mathrm{n}}\right),$$

те би ова 4 вектора могли да буду базис 4Д простора, али, како је укупан простор $\mathbb{C}^3$ према поставци задатка 3Д, довољна су 3 вектора, рецимо

$$\mathbb{W}_1 + \mathbb{W}_2 = \mathbb{L}\left(|w_1\rangle_1^{\mathrm{n}}, |w_2\rangle_1^{\mathrm{n}}, |w_1\rangle_2^{\mathrm{n}}\right) \subseteq \mathbb{C}^3.$$

Сада се пројектор на горњу суму добија од 3 одабрана базна вектора као

$$\hat{P}_{W_1+W_2} = |w_1\rangle_1^{\mathrm{n}}\,{}_1^{\mathrm{n}}\langle w_1| + |w_2\rangle_1^{\mathrm{n}}\,{}_1^{\mathrm{n}}\langle w_1| + |w_1\rangle_2^{\mathrm{n}}\,{}_2^{\mathrm{n}}\langle w_1|$$

$$\to \left[\hat{P}_{W_1+W_2}\right]_{\{|e_i\rangle\}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 \\ -i \\ 1 \end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 & i & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i^2 & -i \\ 0 & i & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -i \\ 0 & i & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -i \\ 0 & i & 1 \end{bmatrix}$$

Пошто добијена матрица нема само јединице на главној дијагонали, она не представља јединични оператор. Разлог томе јесте то што, иако је вектор $\left|w_1\right\rangle_2^{\mathrm{n}}$ био ортонормиран у односу на вектор $\left|w_2\right\rangle_2^{\mathrm{n}}$ у потпростору $\mathbb{W}_2$, он није ортонормиран у односу на векторе $\left|w_1\right\rangle_1^{\mathrm{n}}$ и $\left|w_2\right\rangle_1^{\mathrm{n}}$ у суми потпростора $\mathbb{W}_1+\mathbb{W}_2$. Стога ова три вектора треба ортонормирати, али тако да се добије најједноставнији могући базис, те ће у односу на векторе $\left|w_1\right\rangle_1^{\mathrm{n}}$ и $\left|w_1\right\rangle_2^{\mathrm{n}}$ бити ортонормиран вектор $\left|w_2\right\rangle_1^{\mathrm{n}}$

$$
\begin{aligned}
\left|w_2\right\rangle_1^{\mathrm{nn}} &= \frac{\left|w_2\right\rangle_1^{\mathrm{n}} - {}_{1}^{\mathrm{n}}\!\left\langle w_1 \middle| w_2\right\rangle_1^{\mathrm{n}}\left|w_1\right\rangle_1^{\mathrm{n}} - {}_{2}^{\mathrm{n}}\!\left\langle w_1 \middle| w_2\right\rangle_1^{\mathrm{n}}\left|w_1\right\rangle_2^{\mathrm{n}}}{\left\| \left|w_2\right\rangle_1^{\mathrm{n}} - {}_{1}^{\mathrm{n}}\!\left\langle w_1 \middle| w_2\right\rangle_1^{\mathrm{n}}\left|w_1\right\rangle_1^{\mathrm{n}} - {}_{2}^{\mathrm{n}}\!\left\langle w_1 \middle| w_2\right\rangle_1^{\mathrm{n}}\left|w_1\right\rangle_2^{\mathrm{n}} \right\|} \\
&= \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}(0,-i,1) - \left((1,0,0),\frac{1}{\sqrt{2}}(0,-i,1)\right)(1,0,0) - \left((0,1,0),\frac{1}{\sqrt{2}}(0,-i,1)\right)(0,1,0)}{\left\|\frac{1}{\sqrt{2}}(0,-i,1) - \left((1,0,0),\frac{1}{\sqrt{2}}(0,-i,1)\right)(1,0,0) - \left((0,1,0),\frac{1}{\sqrt{2}}(0,-i,1)\right)(0,1,0)\right\|} \\
&= \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}(0,-i,1) - \frac{1}{\sqrt{2}}\left((1,0,0),(0,-i,1)\right)(1,0,0) - \frac{1}{\sqrt{2}}\left((0,1,0),(0,-i,1)\right)(0,1,0)}{\left\|\frac{1}{\sqrt{2}}(0,-i,1) - \frac{1}{\sqrt{2}}\left((1,0,0),(0,-i,1)\right)(1,0,0) - \frac{1}{\sqrt{2}}\left((0,1,0),(0,-i,1)\right)(0,1,0)\right\|} \\
&= \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\,\frac{(0,-i,1) - \left((1,0,0),(0,-i,1)\right)(1,0,0) - \left((0,1,0),(0,-i,1)\right)(0,1,0)}{\left\|(0,-i,1) - \left((1,0,0),(0,-i,1)\right)(1,0,0) - \left((0,1,0),(0,-i,1)\right)(0,1,0)\right\|} \\
&= \frac{(0,-i,1) - 0\,(1,0,0) - (-i)(0,1,0)}{\left\|(0,-i,1) - 0\,(1,0,0) - (-i)(0,1,0)\right\|} = \frac{(0,-i,1) + i(0,1,0)}{\left\|(0,-i,1) + i(0,1,0)\right\|} = \frac{(0,-i+i,1)}{\left\|(0,-i+i,1)\right\|} = (0,0,1)
\end{aligned}
$$

Као што се могло и очекивати, будући да су вектори $\left|w_1\right\rangle_1^{\mathrm{n}}$ и $\left|w_1\right\rangle_2^{\mathrm{n}}$ прва два вектора апсолутног базиса, процес ортонормализације вектора $\left|w_2\right\rangle_1^{\mathrm{n}}$ је довео до тога да он постане трећи вектор апсолутног базиса.

Коначно се може добити пројектор на суму задатих потпростора

$$
\hat{P}_{W_1+W_2} = \left|w_1\right\rangle_1^{\mathrm{n}}\,{}_{1}^{\mathrm{n}}\!\left\langle w_1\right| + \left|w_2\right\rangle_1^{\mathrm{nn}}\,{}_{1}^{\mathrm{nn}}\!\left\langle w_1\right| + \left|w_1\right\rangle_2^{\mathrm{n}}\,{}_{2}^{\mathrm{n}}\!\left\langle w_1\right|
$$

$$
\begin{aligned}
\to \left[\hat{P}_{W_1+W_2}\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}} &= \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix} = \left[\hat{I}\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}
\end{aligned}
$$

Ово уствари значи да се сумом задатих потпростора добија читав простор $\mathbb{C}^3$.

(7.7) Нека је у унитарном $n-$димензионалном простору $\mathbb{U}$ дат потпростор $\mathbb{W}$ образован векторима $\{|w_1\rangle,|w_2\rangle,\dots,|w_m\rangle\}$, $(m\le n)$, као и произвољан вектор $|u\rangle$.

(а) Показати да је

$$\left\||u\rangle-\hat{P}_W|u\rangle\right\|=\min\left\{\left\||u\rangle-|w_i\rangle\right\|,|w_i\rangle\in\mathbb{W}\right\}$$

што значи да је *нормала* на потпростор најкраће растојање до потпростора.

(б) Такође показати да у случају када је $\mathbb{U}$ еуклидски простор $\mathbb{R}^n$ вектор $\hat{P}_W|u\rangle$ јесте управо онај вектор $\sum_{i=1}^{m}c_i|w_i\rangle$ за који је

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m}c_i w_{ij}-u_j\right)^2$$

минимално, где је $|w_i\rangle=(w_{i1},w_{i2},\dots,w_{in})$, $(i=\overline{1,m})$, и $|u\rangle=(u_1,u_2,\dots,u_n)$. Тада вектор $\hat{P}_W|u\rangle$ јесте *најбоља апроксимација* вектора $|u\rangle$ векторима $\{|w_1\rangle,|w_2\rangle,\dots,|w_m\rangle\}$, $(m\le n)$.

(а) Ако у $n-$димензионалном простору $\mathbb{U}$ постоји $m-$димензионални потпростор $\mathbb{W}$, онда остатак простора чини ортокомплементарни $(n-m)-$димензионални потпростор $\mathbb{W}^{\perp}$

$$\mathbb{U}=\mathbb{W}\oplus\mathbb{W}^{\perp}.$$

У том случају се јединични оператор може написати као збир пројектора на потпростор и пројектора на ортокомплемент, тзв. *разлагање јединице*

$$\hat{I}=\hat{P}_W+\hat{P}_{W^{\perp}},$$

што се овде испоставља јако корисним, пошто јединични оператор оставља сваки вектор на који делује непромењеним

$$|u\rangle=\hat{I}|u\rangle=\left(\hat{P}_W+\hat{P}_{W^{\perp}}\right)|u\rangle=\hat{P}_W|u\rangle+\hat{P}_{W^{\perp}}|u\rangle,$$

одакле се добија формула која ће бити касније употребљена

$$\hat{P}_{W^{\perp}}|u\rangle=|u\rangle-\hat{P}_W|u\rangle.$$

Сад, како оба пројектора пројектују векторе на сопствени потпростор, јасно је да мора бити

$$\hat{P}_W|u\rangle-|w_i\rangle\perp\hat{P}_{W^{\perp}}|u\rangle,\ \forall|w_i\rangle\in\mathbb{W}.$$

Збир квадрата норме вектора $\hat{P}_{W^{\perp}}|u\rangle$ и квадрата норме вектора $\hat{P}_W|u\rangle-|w_i\rangle$, уз узимање у обзир малопре добијеног израза $\hat{P}_{W^{\perp}}|u\rangle=|u\rangle-\hat{P}_W|u\rangle$, биће

$$\begin{aligned}\left\|\hat{P}_{W^{\perp}}|u\rangle\right\|^2+\left\|\hat{P}_W|u\rangle-|w_i\rangle\right\|^2&=\left\||u\rangle-\hat{P}_W|u\rangle\right\|^2+\left\|\hat{P}_W|u\rangle-|w_i\rangle\right\|^2\\&=\left\||u\rangle-\hat{P}_W|u\rangle+\hat{P}_W|u\rangle-|w_i\rangle\right\|^2=\left\||u\rangle-|w_i\rangle\right\|^2\end{aligned}$$

на основу чега је очигледно

$$\left\| |u\rangle - \hat{P}_W |u\rangle \right\|^2 \leq \left\| |u\rangle - |w_i\rangle \right\|^2, \ \forall |w_i\rangle \in \mathbb{W},$$

илити

$$\left\| |u\rangle - \hat{P}_W |u\rangle \right\| \leq \left\| |u\rangle - |w_i\rangle \right\|, \ \forall |w_i\rangle \in \mathbb{W}.$$

Може се закључити да су норме са леве и десне стране међусобно једнаке

$$\left\| |u\rangle - \hat{P}_W |u\rangle \right\| = \left\| |u\rangle - |w_i\rangle \right\|, \ \forall |w_i\rangle \in \mathbb{W}$$

само у случају када је $\hat{P}_W |u\rangle = |w_i\rangle$, те стога мора бити да је

$$\left\| |u\rangle - \hat{P}_W |u\rangle \right\| = \min\left\{ \left\| |u\rangle - |w_i\rangle \right\|, |w_i\rangle \in \mathbb{W} \right\}.$$

што значи да је нормала на дати потпростор *најкраће растојање* до тог потпростора.

(б) Израз дат у поставци задатка може се изменити на следећи начин

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} c_i w_{ij} - u_j\right)^2 &= \sum_{j=1}^{n}(c_1 w_{1j} + c_2 w_{2j} + \ldots + c_m w_{mj} - u_j)^2 \\
&= (c_1 w_{11} + c_2 w_{21} + \ldots + c_m w_{m1} - u_1)^2 \\
&+ (c_1 w_{12} + c_2 w_{22} + \ldots + c_m w_{m2} - u_2)^2 \\
&\qquad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\
&+ (c_1 w_{1n} + c_2 w_{2n} + \ldots + c_m w_{mn} - u_n)^2 \\
&= \left(c_1 \begin{bmatrix} w_{11} \\ w_{12} \\ \vdots \\ w_{1n} \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} w_{21} \\ w_{22} \\ \vdots \\ w_{2n} \end{bmatrix} + \ldots + c_m \begin{bmatrix} w_{m1} \\ w_{m2} \\ \vdots \\ w_{mn} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \right)^2 \\
&= \left(c_1 |w_1\rangle + c_2 |w_2\rangle + \ldots + c_m |w_m\rangle - |u\rangle \right)^2 \\
&= \left(c_1 |w_1\rangle + c_2 |w_2\rangle + \ldots + c_m |w_m\rangle - |u\rangle \right)\left(c_1 |w_1\rangle + c_2 |w_2\rangle + \ldots + c_m |w_m\rangle - |u\rangle \right) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{m} c_i |w_i\rangle - |u\rangle \right)\left(\sum_{i=1}^{m} c_i |w_i\rangle - |u\rangle \right) = \left\langle \sum_{i=1}^{m} c_i |w_i\rangle - |u\rangle \middle| \sum_{i=1}^{m} c_i |w_i\rangle - |u\rangle \right\rangle \\
&= \left\| \sum_{i=1}^{m} c_i |w_i\rangle - |u\rangle \right\|^2 \equiv \left\| |u\rangle - \sum_{i=1}^{m} c_i |w_i\rangle \right\|^2
\end{aligned}$$

На основу претходно доказаног дела задатка **(а)**, горњи израз биће *минималан* ако је

$$\sum_{i=1}^{n} c_i |w_i\rangle = \hat{P}_W |u\rangle$$

јер се тада добија да је

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} c_i w_{ij} - u_j\right)^2 = \left\| |u\rangle - \hat{P}_W |u\rangle \right\|^2,$$

што је најмање растојање до потпростора, односно *нормала* на потпростор.

(7.8) Нека је у простору полинома $\mathbb{P}^4$ са ниже дефинисаним скаларним производом

$$\langle v_1 | v_2 \rangle \stackrel{\mathrm{d}}{=} \int_0^1 v_1(t)\, v_2(t)\, \mathrm{d}t$$

вектор задат као $v(t) = 3t^2$ апроксимирати *линеарном комбинацијом* полинома у следећа два случаја

(а) $1,\ t$; (б) $1,\ t,\ t^3$.

(а) Задати су следећи полиноми: $1,\ t$ које, наравно, треба ортонормирати, коришћењем дате дефиниције скаларног производа

$$|\mathrm{e}_1\rangle = \frac{1}{\|1\|} = \frac{1}{\sqrt{\langle 1|1\rangle}} = \frac{1}{\sqrt{\int_0^1 1 1\,\mathrm{d}t}} = \frac{1}{\sqrt{\int_0^1 \mathrm{d}t}} = \frac{1}{\sqrt{\left(t\big|_0^1\right)}} = \frac{1}{\sqrt{(1-0)}} = \frac{1}{\sqrt{1}} = 1,$$

$$|\mathrm{e}_2\rangle = \frac{t - \langle 1|t\rangle 1}{\|t - \langle 1|t\rangle 1\|} = \frac{t - \int_0^1 1\,t\,\mathrm{d}t}{\left\|t - \int_0^1 1\,t\,\mathrm{d}t\right\|} = \frac{t - \int_0^1 t\,\mathrm{d}t}{\left\|t - \int_0^1 t\,\mathrm{d}t\right\|} = \frac{t - \left(\frac{t^2}{2}\Big|_0^1\right)}{\left\|t - \left(\frac{t^2}{2}\Big|_0^1\right)\right\|} = \frac{t - \frac{1}{2}}{\left\|t - \frac{1}{2}\right\|} = \frac{t - \frac{1}{2}}{\sqrt{\left\langle t - \frac{1}{2}\middle| t - \frac{1}{2}\right\rangle}}$$

$$= \frac{t - \frac{1}{2}}{\sqrt{\int_0^1 \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 \mathrm{d}t}} = \frac{t - \frac{1}{2}}{\sqrt{\int_0^1 \left(t^2 - t + \frac{1}{4}\right)\mathrm{d}t}} = \frac{t - \frac{1}{2}}{\sqrt{\int_0^1 t^2\,\mathrm{d}t - \int_0^1 t\,\mathrm{d}t + \frac{1}{4}\int_0^1 \mathrm{d}t}}$$

$$= \frac{t - \frac{1}{2}}{\sqrt{\left(\frac{t^3}{3}\Big|_0^1\right) - \left(\frac{t^2}{2}\Big|_0^1\right) + \frac{1}{4}\left(t\big|_0^1\right)}} = \frac{t - \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}}} = \frac{t - \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{8 - 12 + 6}{6\cdot 4}}} = \sqrt{\frac{6\cdot 4}{2}}\left(t - \frac{1}{2}\right) = 2\sqrt{3}\left(t - \frac{1}{2}\right)$$

Ови ортови су добијени пошто образују простор, а то значи да се сваки вектор из $\mathbb{P}^4$ може написати као њихова линеарна комбинација

$$|v\rangle = \sum_{i=1}^{2} \xi_i\,|\mathrm{e}_i\rangle\,.$$

Будући да су коефицијенти линеарне комбинације непознати, они се добијају формирањем скаларног производа између ортова и произвољног вектора, што даје

$$\langle \mathrm{e}_i | v\rangle = \left\langle \mathrm{e}_i \middle| \sum_{j=1}^{2} \xi_j\,|\mathrm{e}_j\rangle \right\rangle = \sum_{j=1}^{2} \xi_j\,\langle \mathrm{e}_i | \mathrm{e}_j\rangle = \sum_{j=1}^{2} \xi_j\,\delta_{ij} = \xi_i\,,$$

те се онда произвољни вектор може писати као

$$\left|v\right\rangle=\sum_{i=1}^{2}\left\langle \mathrm{e}_i\middle|v\right\rangle\left|\mathrm{e}_i\right\rangle=\left\langle \mathrm{e}_1\middle|v\right\rangle\left|\mathrm{e}_1\right\rangle+\left\langle \mathrm{e}_2\middle|v\right\rangle\left|\mathrm{e}_2\right\rangle=\left(\int_0^1 \mathrm{e}_1(t)\,v(t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{e}_1(t)+\left(\int_0^1 \mathrm{e}_2(t)\,v(t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{e}_2(t)$$

$$=\left(\int_0^1 1\,3t^2\,\mathrm{d}t\right)1+\left[\int_0^1 2\sqrt{3}\left(t-\frac{1}{2}\right)3t^2\mathrm{d}t\right]2\sqrt{3}\left(t-\frac{1}{2}\right)=3\int_0^1 t^2\,\mathrm{d}t+36\left(t-\frac{1}{2}\right)\int_0^1\left(t-\frac{1}{2}\right)t^2\mathrm{d}t$$

$$=3\int_0^1 t^2\,\mathrm{d}t+36\left(t-\frac{1}{2}\right)\int_0^1\left(t^3-\frac{1}{2}t^2\right)\mathrm{d}t=3\int_0^1 t^2\,\mathrm{d}t+36\left(t-\frac{1}{2}\right)\left(\int_0^1 t^3\,\mathrm{d}t-\frac{1}{2}\int_0^1 t^2\,\mathrm{d}t\right)$$

$$=3\left(\left.\frac{t^3}{3}\right|_0^1\right)+36\left(t-\frac{1}{2}\right)\left[\left(\left.\frac{t^4}{4}\right|_0^1\right)-\frac{1}{2}\left(\left.\frac{t^3}{3}\right|_0^1\right)\right]=3\frac{1}{3}+36\left(t-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)=1+\cancel{36}\left(t-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{6-4}{\cancel{6}\cdot 4}\right)$$

$$=1+6\left(t-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{2}=1+3\left(t-\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{2}-\frac{3}{2}+3t=3t-\frac{1}{2}$$

(б) Полиноме који су задати: $1,\ t,\ t^3$ треба ортонормирати, преко дате дефиниције скаларног производа. Поступак ортонормирања за први полином исти је као и у случају (а)

$$\left|\mathrm{e}_1\right\rangle=\frac{1}{\|1\|}=\frac{1}{\sqrt{\langle 1|1\rangle}}=\frac{1}{\sqrt{\int_0^1 1\,1\,\mathrm{d}t}}=\frac{1}{\sqrt{\int_0^1 \mathrm{d}t}}=\frac{1}{\sqrt{\left(t|_0^1\right)}}=\frac{1}{\sqrt{(1-0)}}=\frac{1}{\sqrt{1}}=1\,,$$

а исто важи и за други полином

$$\left|\mathrm{e}_2\right\rangle=\frac{t-\langle 1|t\rangle 1}{\left\|t-\langle 1|t\rangle 1\right\|}=\frac{t-\int_0^1 1\;t\;\mathrm{d}t}{\left\|t-\int_0^1 1\;t\;\mathrm{d}t\right\|}=\frac{t-\int_0^1 t\;\mathrm{d}t}{\left\|t-\int_0^1 t\;\mathrm{d}t\right\|}=\frac{t-\left(\left.\frac{t^2}{2}\right|_0^1\right)}{\left\|t-\left(\left.\frac{t^2}{2}\right|_0^1\right)\right\|}=\frac{t-\frac{1}{2}}{\left\|t-\frac{1}{2}\right\|}=\frac{t-\frac{1}{2}}{\sqrt{\left\langle t-\frac{1}{2}\middle|t-\frac{1}{2}\right\rangle}}$$

$$=\frac{t-\frac{1}{2}}{\sqrt{\int_0^1\left(t-\frac{1}{2}\right)^2\mathrm{d}t}}=\frac{t-\frac{1}{2}}{\sqrt{\int_0^1\left(t^2-t+\frac{1}{4}\right)\mathrm{d}t}}=\frac{t-\frac{1}{2}}{\sqrt{\int_0^1 t^2\,\mathrm{d}t-\int_0^1 t\,\mathrm{d}t+\frac{1}{4}\int_0^1 \mathrm{d}t}}$$

$$=\frac{t-\frac{1}{2}}{\sqrt{\left(\left.\frac{t^3}{3}\right|_0^1\right)-\left(\left.\frac{t^2}{2}\right|_0^1\right)+\frac{1}{4}\left(t|_0^1\right)}}=\frac{t-\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}}=\frac{t-\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{8-12+6}{6\cdot 4}}}=\sqrt{\frac{6\cdot 4}{2}}\left(t-\frac{1}{2}\right)=2\sqrt{3}\left(t-\frac{1}{2}\right)$$

Процес ортонормирања трећег полинома знатно је тежи, и отпочиње изразом

$$\left|\mathrm{e}_3\right\rangle=\frac{t^3-\left\langle 1\middle|t^3\right\rangle 1-\left\langle 2\sqrt{3}\left(t-\frac{1}{2}\right)\middle|t^3\right\rangle 2\sqrt{3}\left(t-\frac{1}{2}\right)}{\left\|t^3-\left\langle 1\middle|t^3\right\rangle 1-\left\langle 2\sqrt{3}\left(t-\frac{1}{2}\right)\middle|t^3\right\rangle 2\sqrt{3}\left(t-\frac{1}{2}\right)\right\|}=\frac{t^3-\left\langle 1\middle|t^3\right\rangle-12\left(t-\frac{1}{2}\right)\left\langle\left(t-\frac{1}{2}\right)\middle|t^3\right\rangle}{\left\|t^3-\left\langle 1\middle|t^3\right\rangle-12\left(t-\frac{1}{2}\right)\left\langle\left(t-\frac{1}{2}\right)\middle|t^3\right\rangle\right\|}$$

Применом дате дефиниције скаларног производа, следи

$$|\mathrm{e}_3\rangle = \frac{t^3-\int_0^1 t^3\mathrm{d}t-12\left(t-\frac{1}{2}\right)\int_0^1\left(t-\frac{1}{2}\right)t^3\mathrm{d}t}{\left\|t^3-\int_0^1 t^3\mathrm{d}t-12\left(t-\frac{1}{2}\right)\int_0^1\left(t-\frac{1}{2}\right)t^3\mathrm{d}t\right\|} = \frac{t^3-\int_0^1 t^3\mathrm{d}t-12\left(t-\frac{1}{2}\right)\int_0^1\left(t^4-\frac{1}{2}t^3\right)\mathrm{d}t}{\left\|t^3-\int_0^1 t^3\mathrm{d}t-12\left(t-\frac{1}{2}\right)\int_0^1\left(t^4-\frac{1}{2}t^3\right)\mathrm{d}t\right\|}$$

$$= \frac{t^3-\int_0^1 t^3\mathrm{d}t-12\left(t-\frac{1}{2}\right)\left(\int_0^1 t^4\mathrm{d}t-\frac{1}{2}\int_0^1 t^3\mathrm{d}t\right)}{\left\|t^3-\int_0^1 t^3\mathrm{d}t-12\left(t-\frac{1}{2}\right)\left(\int_0^1 t^4\mathrm{d}t-\frac{1}{2}\int_0^1 t^3\mathrm{d}t\right)\right\|} = \frac{t^3-\left(\left.\frac{t^4}{4}\right|_0^1\right)-12\left(t-\frac{1}{2}\right)\left[\left(\left.\frac{t^5}{5}\right|_0^1\right)-\frac{1}{2}\left(\left.\frac{t^4}{4}\right|_0^1\right)\right]}{\left\|t^3-\left(\left.\frac{t^4}{4}\right|_0^1\right)-12\left(t-\frac{1}{2}\right)\left[\left(\left.\frac{t^5}{5}\right|_0^1\right)-\frac{1}{2}\left(\left.\frac{t^4}{4}\right|_0^1\right)\right]\right\|}$$

$$= \frac{t^3-\frac{1}{4}-12\left(t-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{8}\right)}{\left\|t^3-\frac{1}{4}-12\left(t-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{8}\right)\right\|} = \frac{t^3-\frac{1}{4}-12\left(t-\frac{1}{2}\right)\frac{3}{40}}{\left\|t^3-\frac{1}{4}-12\left(t-\frac{1}{2}\right)\frac{3}{40}\right\|} = \frac{t^3-\frac{1}{4}-\frac{9}{10}\left(t-\frac{1}{2}\right)}{\left\|t^3-\frac{1}{4}-\frac{9}{10}\left(t-\frac{1}{2}\right)\right\|}$$

$$= \frac{t^3-\frac{1}{4}-\frac{9}{10}t+\frac{9}{20}}{\left\|t^3-\frac{1}{4}-\frac{9}{10}t+\frac{9}{20}\right\|} = \frac{t^3-\frac{9}{10}t+\frac{1}{5}}{\left\|t^3-\frac{9}{10}t+\frac{1}{5}\right\|} = \frac{t^3-\frac{9}{10}t+\frac{1}{5}}{\sqrt{\left\langle t^3-\frac{9}{10}t+\frac{1}{5}\middle| t^3-\frac{9}{10}t+\frac{1}{5}\right\rangle}}$$

$$= \frac{t^3-\frac{9}{10}t+\frac{1}{5}}{\sqrt{\int_0^1\left(t^3-\frac{9}{10}t+\frac{1}{5}\right)^2\mathrm{d}t}} = \frac{t^3-\frac{9}{10}t+\frac{1}{5}}{\sqrt{\int_0^1\left(t^6-\frac{9}{5}t^4+\frac{2}{5}t^3+\frac{81}{100}t^2-\frac{9}{25}t+\frac{1}{25}\right)\mathrm{d}t}}$$

$$= \frac{t^3-\frac{9}{10}t+\frac{1}{5}}{\sqrt{\left(\int_0^1 t^6\mathrm{d}t-\frac{9}{5}\int_0^1 t^4\mathrm{d}t+\frac{2}{5}\int_0^1 t^3\mathrm{d}t+\frac{81}{100}\int_0^1 t^2\mathrm{d}t-\frac{9}{25}\int_0^1 t\,\mathrm{d}t+\frac{1}{25}\int_0^1 \mathrm{d}t\right)}}$$

$$= \frac{t^3-\frac{9}{10}t+\frac{1}{5}}{\sqrt{\left(\left.\frac{t^7}{7}\right|_0^1\right)-\frac{9}{5}\left(\left.\frac{t^5}{5}\right|_0^1\right)+\frac{2}{5}\left(\left.\frac{t^4}{4}\right|_0^1\right)+\frac{81}{100}\left(\left.\frac{t^3}{3}\right|_0^1\right)-\frac{9}{25}\left(\left.\frac{t^2}{2}\right|_0^1\right)+\frac{1}{25}\left(\left.t\right|_0^1\right)}}$$

$$= \frac{t^3-\frac{9}{10}t+\frac{1}{5}}{\sqrt{\frac{1}{7}-\frac{9}{25}+\frac{1}{10}+\frac{27}{100}-\frac{9}{50}+\frac{1}{25}}} = \frac{t^3-\frac{9}{10}t+\frac{1}{5}}{\sqrt{\frac{1}{7}+\frac{-36+10+27-18+4}{100}}} = \frac{t^3-\frac{9}{10}t+\frac{1}{5}}{\sqrt{\frac{1}{7}-\frac{13}{100}}}$$

$$= \frac{t^3-\frac{9}{10}t+\frac{1}{5}}{\sqrt{\frac{100}{7\cdot 100}-\frac{13\cdot 7}{100\cdot 7}}} = \sqrt{\frac{100\cdot 7}{4\cdot 2}}\left(t^3-\frac{9}{10}t+\frac{1}{5}\right) = 5\sqrt{\frac{7}{2}}\left(t^3-\frac{9}{10}t+\frac{1}{5}\right)$$

Добијена три орта образују простор, те се сваки вектор из $\mathbb{P}^4$ може написати као њихова линеарна комбинација

$$\left|v\right\rangle = \sum_{i=1}^{3} \xi_i \left|\mathrm{e}_i\right\rangle .$$

Коефицијенти линеарне комбинације добијају се на исти начин као и у случају **(а)**

$$\left\langle \mathrm{e}_i \middle| v \right\rangle = \left\langle \mathrm{e}_i \middle| \sum_{j=1}^{3} \xi_j \left|\mathrm{e}_j\right\rangle \right\rangle = \sum_{j=1}^{3} \xi_j \left\langle \mathrm{e}_i \middle| \mathrm{e}_j \right\rangle = \sum_{j=1}^{3} \xi_j \delta_{ij} = \xi_i .$$

Произвољни вектор онда се добија на следећи начин

$$\begin{aligned}
\left|v\right\rangle &= \sum_{i=1}^{3} \left\langle \mathrm{e}_i \middle| v \right\rangle \left|\mathrm{e}_i\right\rangle = \left\langle \mathrm{e}_1 \middle| v \right\rangle \left|\mathrm{e}_1\right\rangle + \left\langle \mathrm{e}_2 \middle| v \right\rangle \left|\mathrm{e}_2\right\rangle + \left\langle \mathrm{e}_3 \middle| v \right\rangle \left|\mathrm{e}_3\right\rangle \\
&= \left(\int_0^1 \mathrm{e}_1(t)\, v(t)\, \mathrm{d}t \right) \mathrm{e}_1(t) + \left(\int_0^1 \mathrm{e}_2(t)\, v(t)\, \mathrm{d}t \right) \mathrm{e}_2(t) + \left(\int_0^1 \mathrm{e}_3(t)\, v(t)\, \mathrm{d}t \right) \mathrm{e}_3(t) \\
&= \left(\int_0^1 1\, 3t^2\, \mathrm{d}t \right) 1 + \left[\int_0^1 2\sqrt{3}\left(t - \frac{1}{2}\right) 3t^2\, \mathrm{d}t \right] 2\sqrt{3}\left(t - \frac{1}{2}\right) + \left[\int_0^1 5\sqrt{\frac{7}{2}} \left(t^3 - \frac{9}{10}t + \frac{1}{5}\right) 3t^2\, \mathrm{d}t \right] 5\sqrt{\frac{7}{2}} \left(t^3 - \frac{9}{10}t + \frac{1}{5}\right) \\
&= 3\int_0^1 t^2\, \mathrm{d}t + 36\left(t - \frac{1}{2}\right) \int_0^1 \left(t - \frac{1}{2}\right) t^2\, \mathrm{d}t + \frac{7\cdot 5\cdot 5\cdot 3}{2} \left(t^3 - \frac{9}{10}t + \frac{1}{5}\right) \int_0^1 \left(t^3 - \frac{9}{10}t + \frac{1}{5}\right) t^2\, \mathrm{d}t \\
&= 3\int_0^1 t^2\, \mathrm{d}t + 36\left(t - \frac{1}{2}\right) \int_0^1 \left(t^3 - \frac{1}{2}t^2\right) \mathrm{d}t + \frac{7\cdot 5\cdot 5\cdot 3}{2} \left(t^3 - \frac{9}{10}t + \frac{1}{5}\right) \int_0^1 \left(t^5 - \frac{9}{10}t^3 + \frac{1}{5}t^2\right) \mathrm{d}t \\
&= 3\int_0^1 t^2\, \mathrm{d}t + 36\left(t - \frac{1}{2}\right) \left(\int_0^1 t^3 \mathrm{d}t - \frac{1}{2}\int_0^1 t^2\, \mathrm{d}t \right) + \frac{7\cdot 5\cdot 5\cdot 3}{2} \left(t^3 - \frac{9}{10}t + \frac{1}{5}\right) \left(\int_0^1 t^5 \mathrm{d}t - \frac{9}{10}\int_0^1 t^3 \mathrm{d}t + \frac{1}{5}\int_0^1 t^2\, \mathrm{d}t \right) \\
&= 3\left(\frac{t^3}{3}\bigg|_0^1 \right) + 36\left(t - \frac{1}{2}\right) \left[\left(\frac{t^4}{4}\bigg|_0^1 \right) - \frac{1}{2}\left(\frac{t^3}{3}\bigg|_0^1 \right) \right] + \frac{7\cdot 5\cdot 5\cdot 3}{2} \left(t^3 - \frac{9}{10}t + \frac{1}{5}\right) \left[\left(\frac{t^6}{6}\bigg|_0^1 \right) - \frac{9}{10}\left(\frac{t^4}{4}\bigg|_0^1 \right) + \frac{1}{5}\left(\frac{t^3}{3}\bigg|_0^1 \right) \right] \\
&= 3\frac{1}{3} + 36\left(t - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right) + \frac{7\cdot 5\cdot 5\cdot 3}{2} \left(t^3 - \frac{9}{10}t + \frac{1}{5}\right) \left(\frac{1}{6} - \frac{9}{40} + \frac{1}{15}\right) \\
&= 1 + \cancel{36}\left(t - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{6-4}{\cancel{6}\cdot 4}\right) + \frac{7\cdot 5\cdot 5\cdot 3}{2} \left(t^3 - \frac{9}{10}t + \frac{1}{5}\right) \left(\frac{1}{6}\frac{20}{20} - \frac{9}{40}\frac{3}{3} + \frac{1}{15}\frac{8}{8}\right) \\
&= 1 + 6\left(t - \frac{1}{2}\right)\frac{1}{2} + \frac{7\cdot 5\cdot 5\cdot 3}{2} \left(t^3 - \frac{9}{10}t + \frac{1}{5}\right) \frac{20 - 27 + 8}{120} = 1 + 3\left(t - \frac{1}{2}\right) + \frac{7\cdot 5\cdot \cancel{5}\cdot 3}{2\cdot 4\cdot \cancel{5}\cdot 6} \left(t^3 - \frac{9}{10}t + \frac{1}{5}\right) \\
&= \frac{2}{2} - \frac{3}{2} + 3t + \frac{7\cdot 5\cdot \cancel{3}}{2\cdot 4\cdot 2\cdot \cancel{3}} \left(t^3 - \frac{9}{10}t + \frac{1}{5}\right) = 3t - \frac{1}{2} + \frac{7\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 2} \left(t^3 - \frac{9}{10}t + \frac{1}{5}\right) \\
&= 3t - \frac{1}{2} + \frac{7\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 2}t^3 - \frac{7\cdot \cancel{5}}{2\cdot 4\cdot 2}\frac{3\cdot 3}{2\cdot \cancel{5}}t + \frac{7\cdot \cancel{5}}{2\cdot 4\cdot 2}\frac{1}{\cancel{5}} = \frac{35}{16}t^3 + \left(3 - \frac{63}{32}\right)t + \left(\frac{7}{16} - \frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{35}{16}t^3 + \frac{96 - 63}{32}t + \frac{7 - 8}{16} = \frac{35}{16}t^3 + \frac{33}{32}t - \frac{1}{16} = \frac{1}{32}(70t^3 + 33t - 2)
\end{aligned}$$

(7.9) Функцију $f(t) = \mathrm{e}^t$ апроксимирати нормираним Лежандровим полиномима

$$\left|\,1\,\right\rangle^{\mathrm{n}} = \frac{1}{\sqrt{2}},\ \left|\,t\,\right\rangle^{\mathrm{on}} = \sqrt{\frac{3}{2}}\,t,\ \left|\,t^2\right\rangle^{\mathrm{on}} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}\left(t^2 - \frac{1}{3}\right).$$

По аналогији са формулом за развој произвољног вектора по базисним векторима

$$|v\rangle = \sum_{i=1}^{n} \xi_i\,|\mathrm{e}_i\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle \mathrm{e}_i\,|v\rangle|\mathrm{e}_i\rangle,$$

може се написати и формула за развој произвољне функције по базисним функцијама

$$|\,f(t)\rangle = \sum_{i=1}^{n} \xi_i\,|\,p_i(t)\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle\, p_i(t)|\,f(t)\rangle|\,p_i(t)\rangle\,.$$

Дата функција e^t може се апроксимирати са три Лежандрова полинома према горе датој формули

$$\mathrm{e}^t \approx {}^{\mathrm{n}}\!\left\langle 1\left|\mathrm{e}^t\right.\right\rangle\left|\,1\right\rangle^{\mathrm{n}} + {}^{\mathrm{on}}\!\left\langle\, t\left|\mathrm{e}^t\right.\right\rangle\left|\,t\,\right\rangle^{\mathrm{on}} + {}^{\mathrm{on}}\!\left\langle\, t^2\left|\mathrm{e}^t\right.\right\rangle\left|\,t^2\right\rangle^{\mathrm{on}}.$$

Први члан горње линеарне комбинације добија се на следећи начин

$${}^{\mathrm{n}}\!\left\langle 1\left|\mathrm{e}^t\right.\right\rangle\left|\,1\right\rangle^{\mathrm{n}} = \left(\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t\right)\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^t\Big|_{-1}^{1}\right) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^1 - \mathrm{e}^{-1}) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e} - \frac{1}{\mathrm{e}}\right).$$

Добијање другог члана отпочиње овако

$${}^{\mathrm{on}}\!\left\langle\, t\left|\mathrm{e}^t\right.\right\rangle\left|\,t\,\right\rangle^{\mathrm{on}} = \left(\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{3}{2}}\,t\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t\right)\sqrt{\frac{3}{2}}\,t = \frac{3}{2}\,t\int_{-1}^{1} t\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t\,.$$

Сада је потребна формула за парцијалну интеграцију

$$\int_a^b u\,\mathrm{d}v = \left(u\,v\Big|_a^b\right) - \int_{-1}^{1} v\,\mathrm{d}u\,.$$

Наравно, у овом случају је $u = t$, те је $\mathrm{d}u = \mathrm{d}t$, док је $\mathrm{d}v = \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$, те је $v = \mathrm{e}^t$; други члан поприма следећи облик

$${}^{\mathrm{on}}\!\left\langle\, t\left|\mathrm{e}^t\right.\right\rangle\left|\,t\,\right\rangle^{\mathrm{on}} = \frac{3}{2}\,t\left[\left(t\,\mathrm{e}^t\Big|_{-1}^{1}\right) - \int_{-1}^{1}\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t\right] = \frac{3}{2}\,t\left[\left(t\,\mathrm{e}^t\Big|_{-1}^{1}\right) - \left(\mathrm{e}^t\Big|_{-1}^{1}\right)\right]$$

$$= \frac{3}{2}\,t\left\{\left[1\mathrm{e}^1 - (-1)\,\mathrm{e}^{-1}\right] - (\mathrm{e}^1 - \mathrm{e}^{-1})\right\} = \frac{3}{2}\,t\,(\cancel{\mathrm{e}^1} + \mathrm{e}^{-1} - \cancel{\mathrm{e}^1} + \mathrm{e}^{-1}) = \frac{3t}{\cancel{2}}\,\cancel{2}\,\mathrm{e}^{-1} = 3t\,\frac{1}{\mathrm{e}}$$

Преостало је одредити и трећи члан

$$
{}^{\mathrm{on}}\left\langle t^2 \middle| \mathrm{e}^t \right\rangle \left| t^2 \right\rangle^{\mathrm{on}} = \left[\int_{-1}^{1} \frac{3}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}\left(t^2-\frac{1}{3}\right)\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t\right]\frac{3}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}\left(t^2-\frac{1}{3}\right)
$$

$$
=\frac{9}{4}\frac{5}{2}\left(t^2-\frac{1}{3}\right)\int_{-1}^{1}\left(t^2-\frac{1}{3}\right)\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t=\frac{45}{8}\left(t^2-\frac{1}{3}\right)\left(\int_{-1}^{1}t^2\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t-\frac{1}{3}\int_{-1}^{1}\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t\right)
$$

За први интеграл у загради треба користити формулу за парцијалну интеграцију

$$
\int_a^b u\,\mathrm{d}v=\left(u\,v\Big|_a^b\right)-\int_{-1}^{1}v\,\mathrm{d}u\,,
$$

с тим што је сада $u=t^2$, те је $\mathrm{d}u=2t\,\mathrm{d}t$, док је $\mathrm{d}v=\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$, те је $v=\mathrm{e}^t$; други члан поприма следећи облик

$$
{}^{\mathrm{on}}\left\langle t^2 \middle| \mathrm{e}^t \right\rangle \left| t \right\rangle^{\mathrm{on}} = \frac{45}{8}\left(t^2-\frac{1}{3}\right)\left[\left(t^2\mathrm{e}^t\Big|_{-1}^{1}\right)-2\int_{-1}^{1}t\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t-\frac{1}{3}\int_{-1}^{1}\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t\right]
$$

а потом се искористи иста формула за други интеграл у средњој загради ($u=t$, $\mathrm{d}u=t\,\mathrm{d}t$ и $\mathrm{d}v=\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$, $v=\mathrm{e}^t$)

$$
{}^{\mathrm{on}}\left\langle t^2 \middle| \mathrm{e}^t \right\rangle \left| t \right\rangle^{\mathrm{on}} = \frac{45}{8}\left(t^2-\frac{1}{3}\right)\left\{\left(t^2\mathrm{e}^t\Big|_{-1}^{1}\right)-2\left[\left(t\,\mathrm{e}^t\Big|_{-1}^{1}\right)-\int_{-1}^{1}\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t\right]-\frac{1}{3}\int_{-1}^{1}\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t\right\}
$$

$$
=\frac{45}{8}\left(t^2-\frac{1}{3}\right)\left[\left(t^2\mathrm{e}^t\Big|_{-1}^{1}\right)-2\left(t\,\mathrm{e}^t\Big|_{-1}^{1}\right)+2\int_{-1}^{1}\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t-\frac{1}{3}\int_{-1}^{1}\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t\right]
$$

$$
=\frac{45}{8}\left(t^2-\frac{1}{3}\right)\left[\left(t^2\mathrm{e}^t\Big|_{-1}^{1}\right)-2\left(t\,\mathrm{e}^t\Big|_{-1}^{1}\right)+\frac{5}{3}\left(\mathrm{e}^t\Big|_{-1}^{1}\right)\right]
$$

$$
=\frac{45}{8}\left(t^2-\frac{1}{3}\right)\left\{\left[1^2\,\mathrm{e}^1-(-1)^2\,\mathrm{e}^{-1}\right]-2\left[1\mathrm{e}^1-(-1)\,\mathrm{e}^{-1}\right]+\frac{5}{3}(\mathrm{e}^1-\mathrm{e}^{-1})\right\}
$$

$$
=\frac{45}{8}\left(t^2-\frac{1}{3}\right)\left[(\mathrm{e}^1-\mathrm{e}^{-1})-2(\mathrm{e}^1+\mathrm{e}^{-1})+\frac{5}{3}(\mathrm{e}^1-\mathrm{e}^{-1})\right]
$$

$$
=\frac{45}{8}\left(t^2-\frac{1}{3}\right)\left[\left(1-2+\frac{5}{3}\right)\mathrm{e}^1-\left(1+2+\frac{5}{3}\right)\mathrm{e}^{-1}\right]=\frac{45}{8}\left(t^2-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\mathrm{e}^1-\frac{14}{3}\mathrm{e}^{-1}\right)
$$

$$
=\frac{\cancel{45}}{4\cdot\cancel{2}}\frac{1}{\cancel{3}}\frac{1}{\cancel{3}}(3t^2-1)\,\cancel{2}\left(\mathrm{e}-\frac{7}{\mathrm{e}}\right)=\frac{5}{4}(3t^2-1)\left(\mathrm{e}-\frac{7}{\mathrm{e}}\right)
$$

Преостало је сва три члана вратити у израз за апроксимацију тражене функције Лежандровим полиномима

$$
\mathrm{e}^t\approx\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}-\frac{1}{\mathrm{e}}\right)+3t\frac{1}{\mathrm{e}}+\frac{5}{4}(3t^2-1)\left(\mathrm{e}-\frac{7}{\mathrm{e}}\right)=\frac{1}{2}\mathrm{e}-\frac{1}{2\mathrm{e}}+3t\frac{1}{\mathrm{e}}+\frac{15}{4}t^2\left(\mathrm{e}-\frac{7}{\mathrm{e}}\right)-\frac{5\mathrm{e}}{4}+\frac{35}{4\mathrm{e}}
$$

$$
=\frac{15}{4}t^2\left(\mathrm{e}-\frac{7}{\mathrm{e}}\right)+\frac{3}{\mathrm{e}}t+\left(\frac{1}{2}-\frac{5}{4}\right)\mathrm{e}+\left(\frac{35}{4}-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{\mathrm{e}}=\frac{15}{4}\left(\mathrm{e}-\frac{7}{\mathrm{e}}\right)t^2+\frac{3}{\mathrm{e}}t+\left(-\frac{3}{4}\mathrm{e}+\frac{33}{4}\frac{1}{\mathrm{e}}\right)
$$

(7.10) Познато је да величина y линеарно зависи од m других величина $x_1,\ldots,x_m$

$$y=\sum_{i=1}^{m} c_i x_i$$

при чему је потребно коефицијенте c_i одредити на основу мерења. Врши се n симултаних мерења ($n \geq m$) величина y, x_1, ..., x_m са следећим резултатима

$$\begin{cases} y_1, x_{11}, \ldots, x_{m1} \\ y_2, x_{12}, \ldots, x_{m2} \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ y_n, x_{1n}, \ldots, x_{mn} \end{cases}$$

На основу ових резултата одредити коефицијенте c_i, али тако да добијена зависност најбоље описује резултате мерења, односно да

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} c_i x_{ij} - y_j\right)^2$$

буде минимално - *метод најмањих квадрата*.

Када се при мерењима не би јављале грешке, добијени систем једначина

$$\begin{cases} y_1 = c_{11}x_{11} + c_{21}x_{21} \ldots + c_{m1}x_{m1} \\ y_2 = c_{12}x_{12} + c_{22}x_{22} + \ldots + c_{m2}x_{m2} \\ \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ y_n = c_{1n}x_{1n} + c_{2n}x_{2n} + \ldots + c_{mn}x_{mn} \end{cases}$$

био би *сагласан*; међутим, грешке мерења условљавају да се овај систем може решити само приближно јер *није сагласан*. У том циљу треба формирати матрице-колоне

$$|Y\rangle = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \; |X_i\rangle = \begin{bmatrix} x_{i1} \\ x_{i2} \\ \vdots \\ x_{in} \end{bmatrix}$$

које се могу схватити као вектори из $\mathbb{R}^n$.

Из задатка (7.7) се зна да у простору $\mathbb{R}^n$ вектор $\hat{P}_W|Y\rangle$ јесте управо онај вектор $\sum_{i=1}^{n} c_i |X_i\rangle$ за који је

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} c_i x_{ij} - y_j\right)^2$$

минимално; тада вектор $\hat{P}_W|Y\rangle$ представља најбољу апроксимацију вектора $|Y\rangle$ векторима $\{|X_1\rangle,\ldots,|X_m\rangle\}$ из потпростора $\mathbb{W}=\mathbb{L}(|X_1\rangle,\ldots,|X_m\rangle)$ који они образују. Значи да треба да буде

$$\hat{P}_W|Y\rangle=\sum_{i=1}^{m}c_i|X_i\rangle.$$

На основу раније урађених задатака из поглавља 7 познато је да пројектор на поменути потпростор мора имати облик

$$\hat{P}_W=\sum_{i=1}^{m}|X_i\rangle\langle X_i|$$

одакле следи да је

$$\left(\sum_{i=1}^{m}|X_i\rangle\langle X_i|\right)|Y\rangle=\sum_{i=1}^{m}c_i|X_i\rangle,$$

што је, наравно, једнако

$$\sum_{i=1}^{m}\langle X_i|Y\rangle|X_i\rangle=\sum_{i=1}^{m}c_i|X_i\rangle.$$

Из правила о једнакости редова с леве и десне стране горње једнакости је очигледно да су коефицијенти c_i, такви да зависност

$$y=\sum_{i=1}^{m}c_i x_i$$

најбоље описује резултате мерења, морају бити дати као

$$c_i=\langle X_i|Y\rangle=\begin{bmatrix}x_{i1} & x_{i2} & \ldots & x_{in}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_n\end{bmatrix}=x_{i1}y_1+x_{i2}y_2+\ldots+x_{in}y_n,\ (i=\overline{1,m})$$

или, у развијеном облику

$$\begin{cases}c_1=x_{11}y_1+x_{12}y_2+\ldots+x_{1n}y_n\\ c_2=x_{21}y_1+x_{22}y_2+\ldots+x_{2n}y_n\\ \quad\vdots\qquad\qquad\vdots\qquad\qquad\vdots\\ c_m=x_{m1}y_1+x_{m2}y_2+\ldots+x_{mn}y_n\end{cases}$$

што и јесте *метод најмањих квадрата* (правоугаоника, уствари).

(7.11) Зависност између величина y и x је *линеарна*: $y = ax + b$. Извршено је n мерења величина y и x, те су резултати нанесени на график $y = f(x)$. Одредити коефицијенте a и b тако да добијена права најбоље описује резултате мерења - *метод најмањих квадрата*.

Нека се горња зависност може представити као $y = ax + bz$, где се у сваком од n мерења за z добија вредност 1. Дакле, након n мерења добија се следећи систем

$$\begin{cases} y_1 = ax_1 + b \\ y_2 = ax_2 + b \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ y_n = ax_n + b \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow Y = aX + bI \rightarrow |Y\rangle = a|X\rangle + b|I\rangle .$$

Да би вектори $|Y\rangle$ и $|X\rangle$ представљали базисне векторе одређеног потпростора морали би да буду линеарно независни. Такви ће сигурно бити након ортонормирања, прво првог вектора

$$I^{\mathrm{n}} = \frac{I}{\|I\|} = \frac{I}{\sqrt{\langle I|I\rangle}} = \frac{I}{\sqrt{\mathrm{Tr}(I^{\dagger}I)}} = \frac{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}}{\sqrt{\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}\right)}} = \frac{(1,1,\dots,1)}{\sqrt{1^2 + 1^2 + \dots + 1^2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

а потом и другог

$$|X^{\mathrm{on}}\rangle = \frac{|X\rangle - \langle I^{\mathrm{n}}|X\rangle |I^{\mathrm{n}}\rangle}{\left\| |X\rangle - \langle I^{\mathrm{n}}|X\rangle |I^{\mathrm{n}}\rangle \right\|}$$

$$\rightarrow X^{\mathrm{on}} = \frac{X - \mathrm{Tr}\left(I^{n\dagger}X\right)I^{n}}{\left\| X - \mathrm{Tr}\left(I^{n\dagger}X\right)I^{n} \right\|} = \frac{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} - \mathrm{Tr}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}\right)\frac{1}{\sqrt{n}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}}{\left\| \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} - \mathrm{Tr}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}\right)\frac{1}{\sqrt{n}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \right\|}$$

$$X^{\text{on}}=\frac{\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}-\frac{1}{n}(x_1+x_2+\ldots+x_n)\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}}{\left\|\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}-\frac{1}{n}(x_1+x_2+\ldots+x_n)\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}\right\|}=\frac{\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}-\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}}{\left\|\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}-\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}\right\|}$$

Израз испред јединичне матрице-колоне представља средњу вредност

$$\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}$$

те се горња формула може написати као

$$X^{\text{on}}=\frac{\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}-\bar{x}\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}}{\left\|\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}-\bar{x}\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}\right\|}=\frac{\begin{bmatrix}x_1-\bar{x}\\x_2-\bar{x}\\\vdots\\x_n-\bar{x}\end{bmatrix}}{\left\|\begin{bmatrix}x_1-\bar{x}\\x_2-\bar{x}\\\vdots\\x_n-\bar{x}\end{bmatrix}\right\|}=\frac{\begin{bmatrix}x_1-\bar{x}\\x_2-\bar{x}\\\vdots\\x_n-\bar{x}\end{bmatrix}}{\sqrt{\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}x_1-\bar{x}\\x_2-\bar{x}\\\vdots\\x_n-\bar{x}\end{bmatrix}^{\dagger}\begin{bmatrix}x_1-\bar{x}\\x_2-\bar{x}\\\vdots\\x_n-\bar{x}\end{bmatrix}\right)}}$$

$$=\frac{\begin{bmatrix}x_1-\bar{x}\\x_2-\bar{x}\\\vdots\\x_n-\bar{x}\end{bmatrix}}{\sqrt{\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}\quad & x_2-\bar{x} & \ldots & x_n-\bar{x}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1-\bar{x}\\x_2-\bar{x}\\\vdots\\x_n-\bar{x}\end{bmatrix}\right)}}=\frac{\begin{bmatrix}x_1-\bar{x}\\x_2-\bar{x}\\\vdots\\x_n-\bar{x}\end{bmatrix}}{\sqrt{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\ldots+(x_n-\bar{x})^2}}$$

$$=\frac{\begin{bmatrix}x_1-\bar{x}\\x_2-\bar{x}\\\vdots\\x_n-\bar{x}\end{bmatrix}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}}=\frac{\begin{bmatrix}x_1-\bar{x}\\x_2-\bar{x}\\\vdots\\x_n-\bar{x}\end{bmatrix}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i^2-2x_i\bar{x}+\bar{x}^2)}}=\frac{\begin{bmatrix}x_1-\bar{x}\\x_2-\bar{x}\\\vdots\\x_n-\bar{x}\end{bmatrix}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2-2\bar{x}\sum_{i=1}^{n}x_i+\sum_{i=1}^{n}\bar{x}^2}}$$

илити

$$X^{\text{on}} = \frac{\begin{bmatrix} x_1-\bar{x} \\ x_2-\bar{x} \\ \vdots \\ x_n-\bar{x} \end{bmatrix}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\bar{x}\sum_{i=1}^{n} x_i + (\bar{x}^2+\bar{x}^2+\ldots+\bar{x}^2)}} = \frac{\begin{bmatrix} x_1-\bar{x} \\ x_2-\bar{x} \\ \vdots \\ x_n-\bar{x} \end{bmatrix}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\bar{x}\sum_{i=1}^{n} x_i + n\bar{x}^2}}$$

На основу израза за средњу вредност је

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = n\bar{x}\,,$$

те следи

$$X^{\text{on}} = \frac{\begin{bmatrix} x_1-\bar{x} \\ x_2-\bar{x} \\ \vdots \\ x_n-\bar{x} \end{bmatrix}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\bar{x}\,n\bar{x} + n\bar{x}^2}} = \frac{\begin{bmatrix} x_1-\bar{x} \\ x_2-\bar{x} \\ \vdots \\ x_n-\bar{x} \end{bmatrix}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2n\bar{x}^2 + n\bar{x}^2}} = \frac{\begin{bmatrix} x_1-\bar{x} \\ x_2-\bar{x} \\ \vdots \\ x_n-\bar{x} \end{bmatrix}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2}}\,.$$

Оно што се уствари тражи у овом задатку јесте пројекција вектора $|Y\rangle$ на потпростор $\mathbb{L}\left(|I^{\text{n}}\rangle, |X^{\text{on}}\rangle\right)$ кога образују вектори $|I^{\text{n}}\rangle$ и $|X^{\text{on}}\rangle$

$$|Y\rangle = \langle I^{\text{n}}|Y\rangle|I^{\text{n}}\rangle + \langle X^{\text{on}}|Y\rangle|X^{\text{on}}\rangle,$$

а што у изоморфном простору матрица гласи

$$\begin{aligned} Y &= \mathrm{Tr}(I^{\text{n}\dagger}Y)I^{\text{n}} + \mathrm{Tr}(X^{\text{on}\dagger}Y)X^{\text{on}} \\ &= \mathrm{Tr}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\begin{bmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}\right)\frac{1}{\sqrt{n}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \\ &+\mathrm{Tr}\left(\frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2}}\begin{bmatrix} x_1-\bar{x} & x_2-\bar{x} & \ldots & x_n-\bar{x} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}\right)\frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2}}\begin{bmatrix} x_1-\bar{x} \\ x_2-\bar{x} \\ \vdots \\ x_n-\bar{x} \end{bmatrix} \\ &= \frac{y_1+y_2+\ldots+y_n}{n}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{(x_1-\bar{x})y_1+(x_2-\bar{x})y_2+\ldots+(x_n-\bar{x})y_n}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2}\begin{bmatrix} x_1-\bar{x} \\ x_2-\bar{x} \\ \vdots \\ x_n-\bar{x} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

то јест

$$Y=\frac{\sum_{i=1}^{n}y_i}{n}\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}+\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})y_i}{\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\bar{x}^2}\begin{bmatrix}x_1-\bar{x}\\x_2-\bar{x}\\\vdots\\x_n-\bar{x}\end{bmatrix}=\frac{\sum_{i=1}^{n}y_i}{n}\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}+\frac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\bar{x}\sum_{i=1}^{n}y_i}{\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\bar{x}^2}\begin{bmatrix}x_1-\bar{x}\\x_2-\bar{x}\\\vdots\\x_n-\bar{x}\end{bmatrix}.$$

На основу дефиниције средње вредности је

$$\bar{y}=\frac{\sum_{i=1}^{n}y_i}{n},\ \text{али и}\ \sum_{i=1}^{n}y_i=n\bar{y},$$

па се добија

$$Y=\bar{y}\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}+\frac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\bar{x}n\bar{y}}{\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\bar{x}^2}\begin{bmatrix}x_1-\bar{x}\\x_2-\bar{x}\\\vdots\\x_n-\bar{x}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\bar{y}\\\bar{y}\\\vdots\\\bar{y}\end{bmatrix}+\frac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\bar{x}^2}\begin{bmatrix}x_1-\bar{x}\\x_2-\bar{x}\\\vdots\\x_n-\bar{x}\end{bmatrix}.$$

Сада се разломак испред друге матрице-колоне прогласи за коефицијент

$$a=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\bar{x}^2}$$

чиме се горња пројекција упрошћава

$$Y=\begin{bmatrix}\bar{y}\\\bar{y}\\\vdots\\\bar{y}\end{bmatrix}+a\begin{bmatrix}x_1-\bar{x}\\x_2-\bar{x}\\\vdots\\x_n-\bar{x}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\bar{y}\\\bar{y}\\\vdots\\\bar{y}\end{bmatrix}+a\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\bar{x}\\\bar{x}\\\vdots\\\bar{x}\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}\bar{y}\\\bar{y}\\\vdots\\\bar{y}\end{bmatrix}+a\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}-a\begin{bmatrix}\bar{x}\\\bar{x}\\\vdots\\\bar{x}\end{bmatrix}=a\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}+\left(\begin{bmatrix}\bar{y}\\\bar{y}\\\vdots\\\bar{y}\end{bmatrix}-a\begin{bmatrix}\bar{x}\\\bar{x}\\\vdots\\\bar{x}\end{bmatrix}\right)$$

$$=a\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\bar{y}-a\bar{x}\\\bar{y}-a\bar{x}\\\vdots\\\bar{y}-a\bar{x}\end{bmatrix}=a\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}+(\bar{y}-a\bar{x})\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}=aX+(\bar{y}-a\bar{x})I$$

Упоређивањем добијеног израза са матричном формулом

$$Y=aX+bI$$

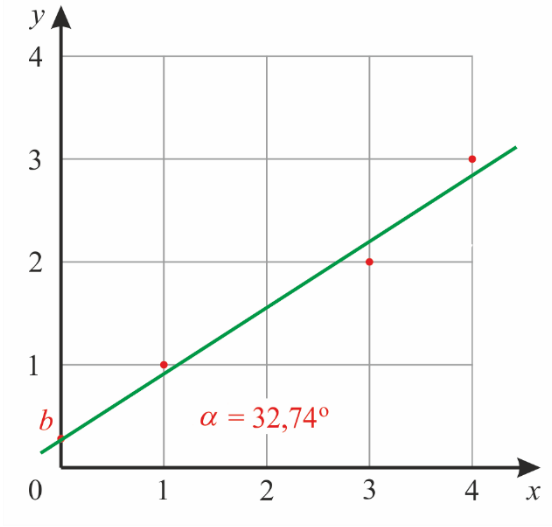
јасно је да су тражени коефицијенти правца праве која најбоље описује резултате мерења дати као (*метода најмањих квадрата*)

$$a=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\bar{x}^2},\ b=\bar{y}-a\bar{x}.$$

(7.12) Директно и коришћењем резултата задатка (7.11) одредити *праву* која ће најбоље апроксимирати следеће резултате мерења величина x и y

$$y_1 = 1 \quad x_1 = 1$$
$$y_2 = 2\,,\ x_2 = 3$$
$$y_3 = 3 \quad x_3 = 4$$

Директно, права се добија цртањем графика датог ниже



Да би се могли искористити коефицијенти правца праве добијени у претходном задатку

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2}\,,\ b = \bar{y} - a\bar{x}$$

потребно је прво одредити средње вредности прве величине

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{3} x_i}{3} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} = \frac{1+3+4}{3} = \frac{8}{3}\,,$$

а потом и друге

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{3} y_i}{3} = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} = \frac{1+2+3}{3} = \frac{6}{3} = 2\,.$$

На основу овога се сада може израчунати први коефицијент правца праве

$$a=\frac{\sum_{i=1}^{3}x_iy_i-3\overline{x}\,\overline{y}}{\sum_{i=1}^{3}x_i^2-3\overline{x}^2}=\frac{(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3)-3\overline{x}\,\overline{y}}{(x_1^2+x_2^2+x_3^2)-3\overline{x}^2}=\frac{(1\cdot1+3\cdot2+4\cdot3)-3\frac{8}{3}2}{(1^2+3^2+4^2)-3\left(\frac{8}{3}\right)^2}=\frac{19-16}{26-\frac{64}{3}}$$

$$=\frac{3\cdot3}{78-64}=\frac{9}{14}\approx0,643$$

а потом и други

$$b=\overline{y}-a\overline{x}=2-\frac{9}{14}\frac{8}{3}=2-\frac{\cancel{3}\cdot3}{7\cdot\cancel{2}}\frac{\cancel{8}\,4}{\cancel{3}}=2-\frac{12}{7}=\frac{14-12}{7}=\frac{2}{7}\approx0,286\,.$$

Први коефицијент правца праве је уствари тангенс угла који она заклапа са осом, те следи

$$\mathrm{tg}\,\alpha\approx0,643\;\Rightarrow\;\alpha\approx\mathrm{arc\,tg}(0,643)\approx32,74°$$

док други коефицијент правца представља вредност коју права одсеца на $y-$оси која је са графика очигледно једнака управо

$$b\approx0,286\,.$$